

**Projektivitätskriterien
und Charakterisierung von
Moïsezon-Räumen**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von **Camilla Horst**
aus München

eingereicht im Juni 1978

**Projektivitätskriterien
und Charakterisierung von
Moïsezon-Räumen**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von **Camilla Horst**
aus München

eingereicht im Juni 1978



1. Referent: Prof. Dr. G. Fischer

Korreferent: Prof. Dr. K. Stein

Tag der mündlichen Prüfung: 27.7.78

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
§ 1 Voraussetzungen, Bezeichnungen und Definitionen	8
§ 2 Projektive Faserungen	20
§ 3 Ample Geradenbündel und Divisoren	28
§ 4 Schnitzzahltheorie	45
§ 5 Numerische Projektivitätskriterien	65
§ 6 Das Chevalley-Kriterium	88
§ 7 Bilder projektiv-algebraischer Räume	94
§ 8 Charakterisierung von Moisézon- Räumen	102
Literatur	120



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549006_0055

Einleitung

Die Untervarietäten komplex-projektiver Räume $\mathbb{P}_N$ bilden eine wichtige Klasse kompakter komplexer Räume. Man sucht daher Bedingungen, unter denen sich ein gegebener kompakter komplexer Raum als Unterraum eines $\mathbb{P}_N$ auffassen läßt, d.h. unter denen eine holomorphe Einbettung dieses Raums in einen $\mathbb{P}_N$ existiert. Wir nennen einen solchen Raum dann projektiv oder, um Verwechslungen mit den projektiven Räumen $\mathbb{P}_n$ auszuschließen, projektiv-algebraisch.

Nicht jeder kompakte komplexe Raum ist projektiv. Die ältesten Beispiele hierzu sind komplexe Tori $\mathbb{C}^n/\Gamma$, $n \geq 2$, mit einem geeigneten Gitter Γ vom Rang $2n$. Nach Riemann gibt es keine eindimensionalen Beispiele dieser Art: Jede kompakte Riemannsche Fläche ist projektiv einbettbar. Der wesentliche Schritt im Beweis hierzu besteht im Nachweis der Existenz einer nichtkonstanten globalen meromorphen Funktion. Für eine kompakte Riemannsche Fläche X ist also der Transzendenzgrad $\text{trdeg}_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_X(X)$ des Körpers $\mathbb{M}_X(X)$ der meromorphen Funktionen auf X stets gleich der Dimension von X . Die Tori $\mathbb{C}^n/\Gamma$ sind für geeignetes Γ nicht projektiv, weil der Transzendenzgrad ihrer meromorphen Funktionskörper kleiner ist als ihre Dimension, wohingegen für einen Unterraum X von $\mathbb{P}_N$ stets gilt: $\dim X = \text{trdeg}_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_X(X)$. Nach dem Einbettungssatz von Chow und Kodaira ist die Verschiedenheit von Dimension und Transzendenzgrad für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten das einzige Hindernis: Jede zwei-

dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, auf der zwei algebraisch unabhängige meromorphe Funktionen existieren, läßt sich in einen $\mathbb{P}_N$ einbetten. Wie ein Beispiel von Grauert [6] zeigt, ist die Voraussetzung der Singularitätenfreiheit dabei wesentlich.

Nach dem Satz von Siegel und Thimm (siehe [4]) gilt für einen irreduziblen kompakten komplexen Raum X stets:

$\dim X \geq \text{trdeg}_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_X(X)$. Wie oben erwähnt, gilt bei projektiv-algebraischen Räumen die Gleichheit.

Ein irreduzibler kompakter komplexer Raum heißt (nach B.G. Mořezon, der diese Räume in [18] erstmals systematisch untersuchte) Mořezon-Raum, wenn der Transzendenzgrad des Körpers seiner meromorphen Funktionen gleich seiner Dimension ist.

Inhalt dieser Arbeit ist in erster Linie die Formulierung von Projektivitätskriterien. Außerdem geben wir in § 8 eine Charakterisierung von Mořezon-Räumen an.

Bei der Untersuchung kompakter komplexer Räume hinsichtlich ihrer Einbettbarkeit in einen projektiven Raum erweist es sich als nützlich, Methoden aus der algebraischen Geometrie in die komplexe Analysis zu übertragen. Ein solches Vorgehen wird motiviert durch Analogien zwischen algebraischen und analytischen Eigenschaften der projektiven Räume. So bewies etwa Hurwitz 1883, daß jede meromorphe Funktion auf einem $\mathbb{P}_n$ rational ist. Ein weiteres Ergebnis in dieser Richtung ist der Satz von Chow, der besagt, daß jeder komplexe Unterraum eines projektiven Raums algebraisch ist.

Grundlegend für die Formulierung von Projektivitätskriterien in der algebraischen Geometrie ist der Begriff des amplen Divisors. Man nennt einen Divisor D auf einem algebraischen Schema S ample, wenn es eine Einbettung $S \rightarrow \mathbb{P}_N$ so gibt, daß ein geeignetes positives Vielfaches von D ein Hyper-ebenenchnitt ist.

Entsprechend nennen wir einen Divisor D auf einem kompakten komplexen Raum X ample, wenn es eine holomorphe Einbettung $X \rightarrow \mathbb{P}_N$ so gibt, daß ein geeignetes positives Vielfaches von D ein Hyperebenenchnitt ist.

Hyperebenenchnitte besitzen gewisse charakteristische geometrische Eigenschaften. So gilt zum Beispiel in einem projektiv-algebraischen Raum: Ein Hyperebenenchnitt trifft jede positiv-dimensionale analytische Menge, und zu jeder s -dimensionalen analytischen Menge A gibt es Hyperebenenchnitte $H_1, \dots, H_s$ so, daß $H_1 \cap \dots \cap H_s \cap A$ nichtleer und diskret ist. Unter Verwendung von Schnittzahlen läßt sich dieser Sachverhalt folgendermaßen formulieren: Für jede s -dimensionale analytische Menge A ist die Schnittzahl $(H^s \cdot A)$ eines Hyperebenenchnitts H mit A positiv.

Das Projektivitätskriterium von Nakai besagt nun, daß diese Eigenschaft charakteristisch für ample Divisoren ist: Ein Divisor D auf einem algebraischen Schema S ist genau dann ample, wenn für jede s -dimensionale Untervarietät A , $s \leq \dim S$, von S die Schnittzahl $(D^s \cdot A)$ positiv ist.

Wir zeigen (Satz 5.2), daß in der analytischen Geometrie eine analoge Aussage gilt.

Trivial ist folgende Feststellung: Je endlich viele Punkte in einem projektiv-algebraischen Raum liegen im Komplement eines Hyperebenenschnitts (insbesondere also in einem affinen Teil). Nach dem Chevalley-Kriterium ist auch diese Eigenschaft charakteristisch für projektive Schemata: Ein algebraisches Schema ist genau dann projektiv, wenn je endlich viele Punkte in einem affinen Teil liegen, der Komplement einer Hyperfläche ist.

Zur Übertragung dieses Satzes in die analytische Geometrie benötigt man ein geeignetes analytisches Analogon des Begriffs "affin". Nun gilt auf Grund des (algebraischen) Lemmas von Chow: Zu jeder affinen Menge U in einem Schema S gibt es eine Modifikation $\tau: \bar{S} \rightarrow S$ mit projektivem $\bar{S}$ so, daß $\tau^{-1}(U)$ Komplement eines Hyperebenenschnitts ist, und τ einen Isomorphismus $\tau^{-1}(U) \rightarrow U$ induziert.

Man ersetzt daher in der analytischen Geometrie "affin" durch "projektiv-abschließbar" (nach Fischer [5]): Eine offene Teilmenge U in einem kompakten komplexen Raum X heißt projektiv-abschließbar, wenn sie Komplement einer Hyperfläche ist, und wenn es eine eigentliche Modifikation $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ mit projektivem $\bar{X}$ so gibt, daß $\pi^{-1}(U)$ Komplement eines Hyperebenenschnitts ist, und π eine biholomorphe Abbildung $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ induziert.

Damit erhält man die analytische Version des Chevalley-Kriteriums (Satz 6.1): Ein kompakter komplexer Raum ist genau dann projektiv, wenn jede seiner endlichen Teilmengen in einer projektiv-abschließbaren Teilmenge liegt.

Nach einem Satz von Mořsezon (8.4) gilt: Ist $\varphi: Y \rightarrow X$ eine surjektive holomorphe Abbildung, so ist mit Y auch X ein Mořsezon-Raum.

Insbesondere sind also Bilder projektiv-algebraischer Räume Mořsezonsch. Sie sind jedoch i.a. nicht projektiv: Nach einem Beispiel von Hironaka (siehe [25]) gibt es nicht-projektive algebraische Schemata. Ebenso liefert das eingangs erwähnte Beispiel von Grauert einen nicht-projektiven (nicht einmal algebraischen) Quotienten eines projektiv-algebraischen Raums. Tatsächlich ist nach dem (analytischen) Lemma von Chow (8.7) jeder Mořsezon-Raum Bild eines projektiv-algebraischen Raums vermöge einer eigentlichen Modifikation.

In Spezialfällen kann man jedoch unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen an X und φ aus der Projektivität von Y auf die von X schließen.

So bewiesen etwa Remmert und van de Ven [21]: Ist $\varphi: Y \rightarrow X$ eine holomorphe Überlagerung und ist X Mannigfaltigkeit, so ist mit Y auch X projektiv.

Die Voraussetzungen dieses Satzes lassen sich noch abschwächen zu "X normal und φ endlich" (7.5). Die Normalität von X ist dabei wesentlich (7.6).

Hauptergebnis dieser Arbeit ist folgender Satz (7.7):

Ist $\varphi: Y \rightarrow X$ eine surjektive holomorphe Abbildung mit konstanter Faserdimension und ist X normal mit diskreter Singularitätenmenge, so ist mit Y auch X projektiv.

Der Begriff des Mořsezon-Raums führt über den Rahmen der algebraischen Geometrie hinaus (während nicht klar ist, ob dies für die in den §§ 4 - 6 betrachteten analytischen Schemata der Fall ist). Wir geben dazu in 8.3 ein von Hironaka stammendes Beispiel einer nicht-algebraischen Mořsezon-Mannigfaltigkeit an. Daraus leiten wir dann noch ein Beispiel einer singularitätenfreien Punktmodifikation des $\mathbb{P}_4$ ab, die keine monoidale Transformation ist.

Nach Grauert [6] ist ein kompakter komplexer Raum genau dann projektiv, wenn auf ihm ein holomorphes Vektorbündel mit exzeptioneller Nullschnittfläche existiert.

In Analogie dazu beweisen wir folgende Charakterisierung von Mořsezon-Räumen (8.12):

Ein kompakter komplexer Raum ist genau dann Mořsezonsch, wenn er sich als exzeptioneller Nullschnitt in einen Kegelraum einbetten läßt.

Ein ähnliches Kriterium, das von der differentialgeometrischen Charakterisierung der Geradenbündel mit exzeptioneller Nullschnittfläche ausgeht, wurde von Riemenschneider [22] vermutet, und in Spezialfällen [22], [23] bewiesen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: Nach Bereitstellung einiger für das weitere wichtiger Grundbegriffe in § 1 werden in § 2 projektive Faserräume betrachtet, die kohärenten Modulgarben zugeordnet sind. Die Ergebnisse dieses Paragraphen werden dann insbesondere in § 8 verwendet. In § 3 geben wir einige Eigenschaften ampler Geraden-

bündel an. Die Beweismethoden sind aus der algebraischen Geometrie (siehe [11]) übernommen. Mit Hilfe der in § 4 für spezielle Räume entwickelten Schnittzahltheorie werden in § 5, vor allem in Hinblick auf den Beweis des Chevalley-Kriteriums in § 6, Aussagen über numerische Eigenschaften ample Divisoren formuliert. Die meisten der Beweise in diesen drei Paragraphen erhält man ebenfalls durch geeignete Modifizierung der entsprechenden Beweise aus der algebraischen Geometrie (siehe [2],[3],[11] und [15]).

In § 7 wird dann nach einigen vorbereitenden Aussagen der oben zitierte Satz 7.7 formuliert. Zu seinem Beweis wird das Chevalley-Kriterium verwendet. Außerdem geben wir noch ein von Barlet mitgeteiltes Beispiel eines nicht-projektiven komplexen Raums mit projektiver Normalisierung an. Anschließend werden in § 8 Moisëzon-Räume untersucht.

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Fischer für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie ihm und Herrn Dr. J. Maurer für interessante Diskussionen zu diesem Themenkreis.

§ 1 Voraussetzungen, Bezeichnungen und Definitionen

In diesem Paragraphen werden, vor allem zur Festlegung der Bezeichnungsweise, einige Standardbegriffe und -aussagen aus der analytischen Geometrie formuliert. Wir verweisen dazu insbesondere auf Fischer [4], Grauert-Remmert [7], [8], Griffiths [9] und Šafarevič [25].

Seien $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ und $Y = (|Y|, \mathcal{O}_Y)$ komplexe Räume, und sei $\varphi: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung.

Analytische Mengen in einem komplexen Raum bezeichnen wir mit den gleichen Symbolen wie die durch sie definierten reduzierten Unterräume. Allgemein werden wir, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, nicht zwischen komplexen Räumen und ihren zugrundeliegenden topologischen Räumen, bzw. holomorphen Abbildungen und den zugehörigen stetigen Abbildungen unterscheiden.

Das Symbol " $Z \hookrightarrow X$ " soll bedeuten: Z ist ein abgeschlossener Unterraum von X .

1.1 Für einen Unterraum $Z \hookrightarrow Y$ wird das analytische Urbild von Z unter φ mit $\varphi^{-1}(Z)$ bezeichnet. $\varphi^{-1}(Z)$ ist der größte Unterraum T von X , für den die Einschränkung von φ eine holomorphe Abbildung $T \rightarrow Z$ induziert. Ist $\mathfrak{z}$ das Ideal von Z , so ist $\varphi^*\mathfrak{z} \rightarrow \varphi^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ das Ideal von $\varphi^{-1}(Z)$.

Ist φ eigentlich, so wird das analytische Bild eines Unterraums $Z' \hookrightarrow X$ unter φ mit $\varphi(Z')$ bezeichnet. $\varphi(Z')$ ist der kleinste Unterraum T' von Y so, daß die Einschränkung von φ eine holomorphe Abbildung $Z' \rightarrow T'$ induziert. Ist $\mathfrak{I}'$ das Ideal von Z' , so ist $\text{Ker}(\mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X / \varphi_* \mathfrak{I}')$ das Ideal von $\varphi(Z')$.

Es gilt dann: $Z' \hookrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(Z'))$ und $\varphi(\varphi^{-1}(Z)) \hookrightarrow Z$.

Seien $Z_1, \dots, Z_n$ abgeschlossene Unterräume von X .

Der analytische Durchschnitt $Z_1 \cap \dots \cap Z_n$ der Z_v ist der größte Unterraum von X , der Unterraum eines jeden der Z_v ist. Sein Ideal ist die Summe der Ideale der Z_v .

Die analytische Vereinigung $Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ der Z_v ist der kleinste Unterraum von X , der jedes der Z_v als Unterraum enthält. Ihr Ideal ist der Durchschnitt der Ideale der Z_v .

Die analytische Summe $Z_1 + \dots + Z_n$ der Z_v ist der durch das Produkt der Ideale der Z_v definierte Unterraum von X .

Ist $Z_1 = \dots = Z_n$, so bezeichnen wir $Z_1 + \dots + Z_n$ mit nZ_1 .

(Vgl. [4, 0.27, 1.18])

1.2 Eine analytische Menge A in X heißt analytisch dünn in X , wenn für alle $x \in X$ und für jede offene Umgebung U von x die Restriktion $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U - A)$ injektiv ist.

Es gilt: Ist A analytisch dünn in X , so ist A nirgends dicht in X . Ist umgekehrt A nirgends dicht in X , und ist X reduziert, so ist A analytisch dünn in X .

(Vgl. [4, 0.43])

1.3 Sei $Z \hookrightarrow X$, und sei A eine analytische Menge in X .

Es gibt einen kleinsten Unterraum $\text{clos}_X(Z - A)$ von X mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\text{clos}_X(Z - A) - A = Z - A$,
- (ii) $A \cap |\text{clos}_X(Z - A)|$ ist analytisch dünn in $\text{clos}_X(Z - A)$.

Es gilt: a) $\text{clos}_X(Z - A) = \overline{|Z| - A}$.

b) $\text{clos}_X(Z - A) = \text{clos}_Z(Z - (A \cap |Z|))$.

c) $A \cap |Z|$ ist genau dann analytisch dünn in Z , wenn Z und $\text{clos}_X(Z - A)$ übereinstimmen.

d) Ist B eine analytische Menge in Y , so ist $\text{clos}_X(X - \varphi^{-1}(B)) \hookrightarrow \varphi^{-1}(\text{clos}_Y(Y - B))$.

(Vgl. [4, 0.44])

Wenn klar ist, was gemeint ist, bezeichnen wir $\text{clos}_X(Z - A)$ mit $\overline{Z - A}$.

1.4 Die Reduktion X_{red} von X bestehe aus endlich vielen irreduziblen Komponenten $T_1^r, \dots, T_m^r$.

Für $\mu = 1, \dots, m$ sei $T_\mu = \text{clos}_X(X - (T_1^r \cup \dots \cup T_{\mu-1}^r \cup T_{\mu+1}^r \cup \dots \cup T_m^r))$.

Die T_μ heißen irreduzible Komponenten von X

$X' := T_1 \cup \dots \cup T_m$ hat die gleichen irreduziblen Komponenten wie X , ist aber im allgemeinen ein echter Unterraum von X .

1.5 Eine Hyperfläche in X ist ein durch ein inversibles (d.h. lokal freies) Ideal definierter Unterraum von X .

Speziell ist $\emptyset$ eine Hyperfläche in X .

Es gilt: a) Nichtleere Hyperflächen haben Kodimension 1.

b) Ist X Mannigfaltigkeit, so ist jeder 1-kodimensionale reduzierte Unterraum von X Hyperfläche in X .

c) Die Trägermengen von Hyperflächen in X sind analytisch dünn in X .

d) Wird $Z \hookrightarrow X$ durch ein Hauptideal definiert, so ist

$Z \cap \text{clos}_X(X - Z)$ Hyperfläche in $\text{clos}_X(X - Z)$.

e) Sei X Mannigfaltigkeit, und seien H_1, H_2 Hyperflächen in X . Es gebe eine analytische Menge A in X mit:

$$H_1 - A = H_2 - A, \quad \overline{H_1 - A} = \overline{H_1} = \overline{H_2} = \overline{H_2 - A}.$$

Dann ist $H_1 = H_2$.

f) Sei X Mannigfaltigkeit. Sind H und H_{red} irreduzible Hyperflächen in X , so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $H = n \cdot H_{\text{red}}$.

g) Sei X Mannigfaltigkeit, und sei H ein 1-kodimensionaler Unterraum von X . Es gebe eine analytische Menge A in X so, daß $H - A$ Hyperfläche in $X - A$ ist. H besitze nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Dann gibt es eine Hyperfläche H' in X mit $H' - A = H - A$.

Beweis von (g): Nach (b) sind die irreduziblen Komponenten

$H_1^r, \dots, H_k^r$ von H_{red} Hyperflächen, und nach (f) gibt es $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ so, daß für die irreduziblen Komponenten

$H_1, \dots, H_k$ von H gilt: $H_k - A = n_k (H_k^r - A)$, $k = 1, \dots, k$.

$H' := n_1 H_1^r + \dots + n_k H_k^r$ ist Hyperfläche in X .

Für die (analytische) Menge S aller Punkte, die in mindestens zwei verschiedenen irreduziblen Komponenten von H liegen, gilt: $(H' - A) - S = (H - A) - S$.

Nach (e) folgt: $H' - A = H - A$.

(Vgl. [4, 0.45])

1.6 Sei φ eigentlich.

φ heißt eigentliche Modifikation, falls ein analytisch dünnes B in Y so existiert, daß gilt: $A := \varphi^{-1}(B)$ ist analytisch dünn in X , und die Einschränkung $\varphi|X-A \rightarrow Y-B$ ist biholomorph.

Ist B minimal mit dieser Eigenschaft, so heißt B Zentrum $Z(\varphi)$ von φ , A Ausnahmemenge $A(\varphi)$ von φ .

Es gilt: a) Ist φ eigentliche Modifikation, so ist $\varphi(X) = Y$. Insbesondere ist $\mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$ injektiv.

b) Sei C analytisch in Y so, daß $\varphi|X - \varphi^{-1}(C) \rightarrow Y - C$ biholomorph ist. Dann induziert φ eine eigentliche Modifikation $\overline{X - \varphi^{-1}(C)} \rightarrow \overline{Y - C}$.

c) Sei φ eine eigentliche Modifikation. Sei Z ein komplexer Raum, und sei $\psi: Z \rightarrow Y$ holomorph.

Ist $\psi^{-1}(Z(\varphi))$ analytisch dünn in Z , so gibt es genau einen Unterraum X_ψ von $X \times_Y Z$ derart, daß die durch die Projektion induzierte Abbildung $\varphi_\psi: X_\psi \rightarrow Z$ eine eigentliche Modifikation ist. φ_ψ heißt strikte Transformierte von φ unter ψ .

Die durch die Projektion induzierte Abbildung $\psi: X_\psi \rightarrow X$ heißt dann strikte Transformierte von ψ unter φ .

Ist $Z \hookrightarrow Y$, und ist ψ die Inklusionsabbildung, so ist $X_\psi \hookrightarrow \varphi^{-1}(Z) \hookrightarrow X$. Man nennt dann X_ψ die strikte Transformierte von Z unter φ .

d) Sei φ eine eigentliche Modifikation, und sei $X \xrightarrow{\tau} S(\varphi) \xrightarrow{\chi} Y$ die Stein-Faktorisierung von φ .

Dann ist τ eine eigentliche Modifikation mit zusammenhängenden Fasern, und χ ist eine endliche Modifikation, d.h. eine eigentliche Modifikation mit diskreten Fasern.

e) Sei Y normal. Ist φ eine endliche Modifikation, so ist φ biholomorph.

f) Sei Y normal. Ist φ eine eigentliche Modifikation, so hat φ zusammenhängende Fasern. $\mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$ ist dann ein Isomorphismus, und es ist $Z(\varphi) = \{y \in Y : \dim \varphi^{-1}(y) > 0\}$.

(Vgl. [4, chap. 4], [17])

1.7 Eine zusammenhängende kompakte analytische Menge C in X heißt exzeptionell in X , falls es einen komplexen Raum X' und eine eigentliche Modifikation $\pi: X \rightarrow X'$ mit einpunktigem Zentrum und Ausnahmemenge C gibt.

Es gilt: C ist genau dann exzeptionell in X , wenn C eine holomorph-konvexe offene Umgebung U besitzt, so daß jede zusammenhängende kompakte analytische Menge positiver Dimension in U Teilmenge von C ist.

1.8 Sei $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul; $d(\mathfrak{F}) := \dim \text{supp } \mathfrak{F}$.

Für $Z \hookrightarrow X$ wird der kohärente $\mathcal{O}_Z$ -Modul $\mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z$ mit $\mathfrak{F}_Z$ bezeichnet. Speziell: $\mathfrak{F}_{\text{red}} := \mathfrak{F}_{X_{\text{red}}}$.

$\mathfrak{F}$ ist kanonisch isomorph zu $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathfrak{F})$, insbesondere ist $H^0(X, \mathfrak{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathfrak{F})$.

$\mathfrak{F}$ heißt global erzeugt, falls $\mathfrak{F}$ von $H^0(X, \mathfrak{F})$ über $\mathcal{O}_X$ erzeugt wird.

Existiert ein Epimorphismus $\mathcal{O}_X^q \rightarrow \mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{F}$ global erzeugt.

Ist X kompakt, so ist $h^q(X, \mathfrak{F}) := \dim H^q(X, \mathfrak{F}) < \infty$ für alle $q \in \mathbb{N}$, und $h^q(X, \mathfrak{F}) = 0$ für fast alle q .

Speziell gilt für kompaktes X : $\mathfrak{F}$ ist genau dann global

erzeugt, wenn es einen Epimorphismus $\mathcal{O}_X^p \rightarrow \mathfrak{F}$ gibt.

Für $x \in X$ sei $\text{rg}_x \mathfrak{F} := \dim \mathfrak{F}_x / \mathfrak{m}_{X,x} \cdot \mathfrak{F}_x$ ($\mathfrak{m}_{X,x}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$).

$A(\mathfrak{F}) := \{x \in X : \text{rg}_x \mathfrak{F} \text{ nicht konstant in } x\}$ und $S(\mathfrak{F}) := \{x \in X : \mathfrak{F}_x \text{ nicht frei}\}$ sind analytische Mengen in X .

$A(\mathfrak{F})$ ist nirgends dicht in X , und es ist $A(\mathfrak{F}) \subset S(\mathfrak{F})$.

Ist X reduziert, so ist $A(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F})$.

" $\text{rg } \mathfrak{F} = r$ " soll bedeuten: $\text{rg}_x \mathfrak{F} = r$ für alle $x \in X - A(\mathfrak{F})$.

(Vgl. [7], [8], [4, 2.13, 2.14])

1.9 Sei $\mathfrak{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1.

Dann definiert $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes m}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X$, $f \otimes \tau \mapsto \tau(f)$, einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$ -Moduln. Man setzt daher $\mathfrak{F}^{\otimes(-1)} := \mathfrak{F}^{\otimes m}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_X)$. Damit wird die Menge der Isomorphieklassen von lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Moduln vom Rang 1 eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\mathcal{O}_X$.

Jeder Morphismus $s: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathfrak{F}$ definiert einen Morphismus

$$j_s: \mathfrak{F}^{\otimes(-1)} \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Ist X reduziert und irreduzibel, und ist $s \neq 0$, so ist j_s injektiv. s definiert dann also ein zu $\mathfrak{F}^{\otimes(-1)}$ isomorphes inversibles Ideal. Insbesondere gilt daher: Ist $h^0(X, \mathfrak{F}) > 0$, und ist $\mathfrak{F}$ nicht trivial (d.h. nicht isomorph zu $\mathcal{O}_X$), so ist $h^0(X, \mathfrak{F}^{\otimes(-1)}) = 0$, denn es ist $h^0(X, \mathfrak{F}) = 0$ für alle nicht-trivialen Ideale $\mathfrak{F}$ in $\mathcal{O}_X$.

1.10 Ist L ein linearer Faserraum vom Rang r über X , so ist die Garbe $\mathcal{L}(L)$ der Linearformen auf L ein kohärenter

$\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang r . Umgekehrt existiert zu jedem kohären-
ten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\tilde{\mathcal{U}}$ ein linearer Faserraum $L(\tilde{\mathcal{U}})$ mit $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{L}(L(\tilde{\mathcal{U}}))$.

Ist $\mathcal{O}_X^p \rightarrow \mathcal{O}_X^q \rightarrow \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow 0$ exakt, (M eine $p \times q$ -Matrix über $\mathcal{O}_X$),
so wird $L(\tilde{\mathcal{U}})$ durch die exakte Sequenz
 $0 \rightarrow L(\tilde{\mathcal{U}}) \rightarrow X \times \mathbb{C}^q \rightarrow X \times \mathbb{C}^p, (x, w) \mapsto (x, M^t(x)w)$
definiert.

Ist $\psi: Z \rightarrow X$ holomorph, so ist $L(\psi^*\tilde{\mathcal{U}}) = L(\tilde{\mathcal{U}}) \times_X Z =: \psi^*L(\tilde{\mathcal{U}})$.

$\tilde{\mathcal{U}}$ ist genau dann lokal frei, wenn $L(\tilde{\mathcal{U}})$ ein Vektorbündel
ist. Für lokal freies $\tilde{\mathcal{U}}$ vom Rang 1 ist $L(\tilde{\mathcal{U}})$ ein Geraden-
bündel mit dualem Bündel $L(\tilde{\mathcal{U}}^{\otimes(-1)}) =: L(\tilde{\mathcal{U}})^{-1}$.

(Vgl. [4, chap. 1], [20])

1.11 Sei G ein Geradenbündel auf X .

Die Garbe der Schnitte in G wird mit $\mathcal{O}_X(G)$ bezeichnet.

Es gilt: $\mathcal{O}_X(G) \cong \mathcal{L}(G)^{\otimes(-1)}$.

Eine Kohomologieklassse $\in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ definiert ein Geraden-
bündel auf X , und jedes Geradenbündel entsteht diese Weise.

Damit bilden die Geradenbündel eine abelsche Gruppe, die
vermöge $G \mapsto \mathcal{O}_X(G)$ isomorph ist zur Gruppe von Isomorphie-
klassen von lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Moduln vom Rang 1.

$\mathcal{K}_X$ sei die Garbe der meromorphen Funktionskeime auf X .

Die zu $0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$ gehörige Kohomologiesequenz
liefert einen Gruppennhomomorphismus $H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Die Elemente von $\text{Div}(X) := H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ heißen Divisoren
auf X .

Jeder Divisor D definiert also ein Geradenbündel G_D auf X .

$\mathcal{O}_X(D) := \mathcal{O}_X(G_D)$ ist ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1.

Es gibt einen Untermodul $\mathfrak{M}_{(D)}$ von $\mathfrak{M}_X$, für den gilt: Ist D in $x \in X$ durch einen meromorphen Funktionskeim f_x bestimmt, so ist $\mathfrak{M}_{(D),x} = \frac{1}{f_x} \mathcal{O}_{X,x}$. $\mathfrak{M}_{(D)}$ ist isomorph zu $\mathcal{O}_X(D)$, und wird daher von jetzt an wieder mit $\mathcal{O}_X(D)$ bezeichnet.

Zwei Divisoren D_1, D_2 auf X heißen (linear) äquivalent,

$D_1 \sim D_2$, wenn sie isomorphe Geradenbündel definieren.

D_1 und D_2 sind genau dann äquivalent, wenn es eine meromorphe Funktion f auf X so gibt, daß $f \cdot \mathcal{O}_X(D_1) = \mathcal{O}_X(D_2)$.

Die Gruppe der Äquivalenzklassen von Divisoren auf X wird mit $\text{Pic}(X)$ bezeichnet. Im allgemeinen werden wir in der Bezeichnung nicht zwischen Divisoren und ihren Äquivalenzklassen unterscheiden.

Ein Divisor D auf X heißt effektiv, wenn er lokal durch holomorphe Funktionen gegeben ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X(D) \subset \mathfrak{M}_X$.

Ein Divisor D ist also genau dann effektiv, wenn er durch die lokalen Gleichungen einer Hyperfläche H_D definiert wird. Das Ideal von H_D ist dann isomorph zu $\mathcal{O}_X(-D) = \mathcal{O}_X(D)^{\otimes(-1)}$. Wenn klar ist, was gemeint ist, bezeichnen wir H_D wieder mit D .

Sind D, D' effektive Divisoren, die durch Hyperflächen $H_D, H_{D'}$ definiert werden, so bestimmt die analytische Summe $H_D + H_{D'}$ (vgl. 1.1) den Divisor $D + D'$.

Sei D ein effektiver Divisor auf X , und sei $0 \neq s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \subset \mathcal{K}_X(X)$ in keinem $x \in X$ ein Nullteiler. $\mathcal{I}_D$ werde durch ein inversibles Ideal $\mathcal{I}$ definiert. Dann ist $s \cdot \mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ ebenfalls ein inversibles Ideal, das einen zu D äquivalenten Divisor D' definiert.

$x \in X$ heißt Basispunkt von D , wenn x in jeder so konstruierten Hyperfläche H_D liegt.

D heißt basispunktfrei, wenn D keine Basispunkte hat.

Ein effektiver Divisor D ist genau dann basispunktfrei, wenn $\mathcal{O}_X(D)$ global erzeugt ist.

(Vgl. [9], [11], [25])

1.12 Seien $r, N \in \mathbb{N}+1$, $r \leq N$. $G(r, N)$ bezeichne die Graßmann-mannigfaltigkeit der r -dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{C}^N$.

$G(r, N)$ wird folgendermaßen parametrisiert:

Für natürliche Zahlen $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N$ und für eine $(N-r) \times r$ -Matrix $A \in \mathbb{C}^{(N-r) \times r}$ sei $A(i_1, \dots, i_r)$ die $N \times r$ -

Matrix, die aus der Matrix $\begin{pmatrix} 1_r \\ A \end{pmatrix}$, 1_r die r -reihige Einheitsmatrix, durch Vertauschen der ρ -ten mit der i_ρ -ten Zeile, $\rho = 1, \dots, r$, hervorgeht. $H(i_1, \dots, i_r)$ sei der $(r$ -dimensionale) Untervektorraum des $\mathbb{C}^N$, der von den Spalten der Matrix $A(i_1, \dots, i_r)$ erzeugt wird.

$j(i_1, \dots, i_r): \mathbb{C}^{(N-r) \times r} \rightarrow U(i_1, \dots, i_r) \subset G(r, N)$ ordne einer Matrix A den Untervektorraum $H(i_1, \dots, i_r)$ zu.

Die $j(i_1, \dots, i_r)$ sind injektiv, und ihre Bilder $U(i_1, \dots, i_r)$

Überdecken $G(r, N)$.

Damit wird $G(r, N)$ eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $(N-r) \cdot r$.

Auf $G(r, N)$ existiert ein Vektorbündel $T_r \hookrightarrow G(r, N) \times \mathbb{C}^N$ vom Rang r , das tautologische Vektorbündel, das folgendermaßen definiert ist:

$$\mathbb{C}^{(N-r) \cdot r} \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\cong} T_r|U(i_1, \dots, i_r) \hookrightarrow U(i_1, \dots, i_r) \times \mathbb{C}^N,$$

$$(A, w) \mapsto (A(i_1, \dots, i_r), w_A),$$

wobei $w_A \in \mathbb{C}^N$ aus $\binom{w}{A_w}$ durch Vertauschen der ρ -ten mit der i_ρ -ten Zeile, $\rho = 1, \dots, r$, hervorgeht.

Als Menge ist $T_r = \{(H, w) \in G(r, N) \times \mathbb{C}^N : w \in H\}$.

T_1 auf $\mathbb{P}_{N-1} = G(1, N)$ wird mit $G_{\mathbb{P}_{N-1}}(-1)$ bezeichnet, das duale Bündel mit $G_{\mathbb{P}_{N-1}}(1)$.

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(G_{\mathbb{P}_{N-1}}(1))$. Für $n \in \mathbb{Z}$ setzt man:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(n) := (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(1))^{\otimes n}.$$

Es ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(H) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(1)$ für jede Hyperebene H in $\mathbb{P}_{N-1}$.

Für $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{N-1}$ setzt man $\mathcal{O}_X(n) := (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{N-1}}(n))_X$.

Diese Definition hängt von der Einbettung von X in $\mathbb{P}_{N-1}$ ab:

Zum Beispiel ist $\mathbb{P}_1$ vermöge $\varphi: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$, $\varphi(z_0:z_1) := (z_0^2:z_1^2:z_0z_1)$ isomorph zu einer Kurve C in $\mathbb{P}_2$, und es ist

$$\mathcal{O}_C(1) \cong \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2).$$

Sei $\mathfrak{I}_r := \mathcal{Z}(T_r)$. Die Einbettung $T_r \hookrightarrow G(r, N) \times \mathbb{C}^N$ induziert einen Epimorphismus $\mathcal{O}_{G(r, N)}^N \rightarrow \mathfrak{I}_r \rightarrow 0$ von $\mathcal{O}_{G(r, N)}$ -Moduln.

Das Paar $(G(r, N), \mathfrak{I}_r)$ hat folgende universelle Eigenschaft:

Ist X ein komplexer Raum, und ist $\mathfrak{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang r mit einer Auflösung $\mathcal{O}_X^N \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{F} \rightarrow 0$, so gibt es genau eine holomorphe Abbildung $s: X \rightarrow G(r, N)$ mit

$$(s^* \mathcal{O}_{G(r, N)}^N \rightarrow s^* \mathfrak{I}_r) = (\mathcal{O}_X^N \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{F}).$$

s ist gegeben durch $X \ni x \mapsto (L(\mathfrak{F}))_x \in G(r, N)$.

Insbesondere gilt für einen kompakten komplexen Raum X :

Ist $\mathfrak{F}$ ein global erzeugter lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang r , und ist $\{s_0, \dots, s_{N-1}\}$ eine Basis von $H^0(X, \mathfrak{F})$, so gibt es

genau eine holomorphe Abbildung $s: X \rightarrow G(r, N)$, derart, daß

$(s^* \mathcal{O}_{G(r, N)}^N \rightarrow s^* \mathfrak{I}_r)$ der durch $(s_0, \dots, s_{N-1})$ gegebene Epimorphismus $(\mathcal{O}_X^N \rightarrow \mathfrak{F})$ ist.

§ 2 Projektive Faserungen

Analog zu dem in 1.12 angedeuteten Sachverhalt gilt in der Kategorie An/X der komplexen Räume über einem festen komplexen Raum X folgender Satz von Grothendieck [10]:

Sei X ein komplexer Raum, und sei $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang r . Für jede natürliche Zahl s , $1 \leq s \leq r$, sei $G_{s,\mathfrak{F}}: An/X \rightarrow Ens$ der Funktor, der einem komplexen Raum $Y \xrightarrow{\psi} X$ über X die Menge der lokal freien Quotienten vom Rang s von $\psi^*\mathfrak{F}$ zuordnet.

Dann sind die $G_{s,\mathfrak{F}}$ darstellbar.

Wir skizzieren einen Beweis dieses Satzes, und leiten dann daraus eine Verallgemeinerung des Begriffs der monoidalen Transformation (vgl. [4]) ab.

In den folgenden Paragraphen wird nur der Fall $s=1$ von Bedeutung sein: Einem kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ wird ein komplexer Raum $IP(\mathfrak{F})$ über X zugeordnet, auf dem ein "relativ-tautologisches" Geradenbündel existiert.

2.1 Satz: Sei X ein komplexer Raum, und sei $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang r . Sei $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq r$.

Es gibt einen komplexen Raum $G(s,\mathfrak{F})$ und eine eigentliche holomorphe Abbildung $p_{s,\mathfrak{F}}: G(s,\mathfrak{F}) \rightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $p_{s,\mathfrak{F}}^*$ besitzt einen lokal freien Quotienten $\mathfrak{X}_{s,\mathfrak{F}}$ vom Rang s .
- (ii) Ist $\psi: Y \rightarrow X$ ein komplexer Raum über X , und ist $\mathcal{G}$ ein lokal freier Quotient vom Rang s von $\psi^*\mathfrak{F}$, so gibt es bis auf Isomorphie über X genau eine holomorphe Abbildung $\chi: Y \rightarrow G(s,\mathfrak{F})$, für die gilt: $p_{s,\mathfrak{F}} \circ \chi = \psi$ und $\mathcal{G} \cong \chi^* \mathfrak{X}_{s,\mathfrak{F}}$

Beweisskizze: X besitzt eine offene Überdeckung $(U_i : i \in I)$ derart, daß zu jedem $i \in I$ eine exakte Sequenz

$$0_X^p|_{U_i} \rightarrow 0_X^q|_{U_i} \rightarrow \mathfrak{F}|_{U_i} \rightarrow 0 \text{ existiert.}$$

Es genügt nun, für alle $i \in I$ $p_{s,\mathfrak{F}}|_{U_i}: G(s,\mathfrak{F}|_{U_i}) \rightarrow U_i$ so zu konstruieren, daß die Aussage des Satzes (mit $X := U_i$) richtig ist. Wegen der universellen Eigenschaft (ii) lassen sich dann die lokalen Lösungen zu einem komplexen Raum $p_{s,\mathfrak{F}}: G(s,\mathfrak{F}) \rightarrow X$ über X mit den gewünschten Eigenschaften verheften.

Ohne Einschränkung existiere also eine exakte Sequenz

$$0_X^p \xrightarrow{M^t} 0_X^q \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow 0. \quad G(s,\mathfrak{F}) \text{ wird als Unterraum von } X \times G(s,q) \text{ konstruiert.}$$

$$\text{Sei } j(i_1, \dots, i_s): \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s} \rightarrow U(i_1, \dots, i_s) \subset G(s,q),$$

$1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq q$, die in 1.12 angegebene Parametrisierung von $G(s,q)$, und sei $V(i_1, \dots, i_s) := X \times U(i_1, \dots, i_s) \cong X \times \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s}$. Die Abbildung

$$X \times \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s} \ni (x, A) \mapsto (x, M(x) \cdot A(i_1, \dots, i_s)) \in X \times \mathbb{C}^{ps}$$

ist ein Morphismus von linearen Faserräumen über X (dabei sei $A(i_1, \dots, i_s)$ die $q \times s$ -Matrix, die aus $\begin{pmatrix} 1 & s \\ & A \end{pmatrix}$ durch Vertauschen der σ -ten mit der i_σ -ten Zeile, $\sigma=1, \dots, s$, hervorgeht). $V(i_1, \dots, i_s; \mathfrak{F})$ sei der Kern dieses Morphismus.

Die $V(i_1, \dots, i_s; \mathfrak{F})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq s$, definieren einen abgeschlossenen Unterraum $G(s, \mathfrak{F}) \hookrightarrow X \times G(s, q)$; $p_{s, \mathfrak{F}}$ sei die Einschränkung der Projektion $\text{pr}_1: X \times G(s, q) \rightarrow X$.

Als Menge ist $G(s, \mathfrak{F}) = \{(x, H) \in X \times G(s, q) : H \subset \text{Ker } M(x)\} = \{(x, H) : X \times G(s, q) : H \subset L(\mathfrak{F})_x\}$.

$p_{s, \mathfrak{F}}$ ist eine eigentliche holomorphe Abbildung, und $G(s, \mathfrak{F})$ hängt bis auf Isomorphie über X nicht von der Auflösung $\mathcal{O}_X^p \rightarrow \mathcal{O}_X^q \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow 0$ ab.

Sei $\mathfrak{X}_s := \mathcal{L}(T_s)$, T_s das tautologische Vektorbündel auf $G(s, q)$ gemäß 1.12.

Dann ist $\mathfrak{X}_{s, \mathfrak{F}} := \text{pr}_2^* \mathfrak{X}_s$ ($\text{pr}_2: X \times G(s, q) \rightarrow G(s, q)$ die Projektion) ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang s .

Wir zeigen für $T := L(\mathfrak{X}_{s, \mathfrak{F}})$: T ist linearer Unterraum von $p_{s, \mathfrak{F}}^*(L(\mathfrak{F}))$. Dann folgt: $\mathfrak{X}_{s, \mathfrak{F}}$ ist lokal freier Quotient vom Rang s von $p_{s, \mathfrak{F}}^* \mathfrak{F}$.

$T|V(1, \dots; \mathfrak{F})$, aufgefaßt als Unterraum $\overset{\text{von}}{X \times U(1, \dots, s) \times \mathbb{C}^q} \cong X \times \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s} \times \mathbb{C}^q$, ist der Kern des Morphismus von linearen Faserräumen über X

$X \times \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s} \times \mathbb{C}^q \ni (x, A, w) \mapsto (x, M(x) \cdot A(1, \dots, s), w'' - Aw')$.

Dabei sei $w' := (w_1, \dots, w_s)^t$, $w'' := (w_{s+1}, \dots, w_q)^t$.

$p_{s,\mathfrak{F}}^* L(\mathfrak{F})|V(1,\dots,s;\mathfrak{F})$, aufgefaßt als Unterraum von $X \times U(1,\dots,s) \times \mathbb{C}^q \cong X \times \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s} \times \mathbb{C}^q$, ist der Kern des Morphismus von linearen Faserräumen über X

$$X \times \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s} \times \mathbb{C}^q \ni (x, A, w) \mapsto (x, M(x) \cdot A(1, \dots, s), M(x)w).$$

Sei M' die aus den ersten s , M'' die aus den letzten $q-s$ Spalten von M bestehende Matrix.

$$\text{Dann ist } M(x)w = M'(x) \cdot w' + M''(x) \cdot w'' =$$

$$M'(x) \cdot w' + M''(x) \cdot (w'' - A \cdot w') + M''(x) \cdot A \cdot w' =$$

$$M(x) \cdot A(1, \dots, s) \cdot w + M''(x) \cdot (w'' - A \cdot w').$$

Damit ist gezeigt: Das Ideal, das $T|V(1,\dots,s;\mathfrak{F})$ als Unterraum von $X \times \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s} \times \mathbb{C}^q$ beschreibt, enthält das Ideal, das $p_{s,\mathfrak{F}}^* L(\mathfrak{F})|V(1,\dots,s;\mathfrak{F})$ als Unterraum von $X \times \mathbb{C}^{(q-s) \cdot s} \times \mathbb{C}^q$ beschreibt; also ist

$$T|V(1,\dots,s;\mathfrak{F}) \longrightarrow p_{s,\mathfrak{F}}^* L(\mathfrak{F})|V(1,\dots,s;\mathfrak{F}).$$

Den allgemeinen Fall:

$$T|V(i_1, \dots, i_s; \mathfrak{F}) \hookrightarrow p_{s,\mathfrak{F}}^* L(\mathfrak{F})|V(i_1, \dots, i_s; \mathfrak{F}), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq q,$$

zeigt man analog.

$$\text{Insgesamt folgt: } T \hookrightarrow p_{s,\mathfrak{F}}^* L(\mathfrak{F}). \quad (*)$$

Die lineare Struktur auf T bzw. $p_{s,\mathfrak{F}}^* L(\mathfrak{F})$ wird induziert durch die natürliche lineare Struktur auf $G(s, \mathfrak{F}) \times \mathbb{C}^q$.

Daraus und aus $(*)$ folgt: T ist linearer Unterraum von $p_{s,\mathfrak{F}}^* L(\mathfrak{F})$, d.h. $\mathfrak{L}_{s,\mathfrak{F}}$ ist Quotient von $p_{s,\mathfrak{F}}^* \mathfrak{F}$.

Sei $\psi: Y \rightarrow X$ holomorph, und sei $\mathfrak{G}$ ein lokal freier Quotient vom Rang s von $\psi^* \mathfrak{F}$.

Die exakte Sequenz $\mathcal{O}_X^p \rightarrow \mathcal{O}_X^q \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow 0$ induziert eine exakte Sequenz $\mathcal{O}_Y^p \rightarrow \mathcal{O}_Y^q \rightarrow \psi^*\mathfrak{F} \rightarrow 0$. Also kann $G(s, \psi^*\mathfrak{F})$ analog zu $G(s, \mathfrak{F})$ konstruiert werden. Aus der Konstruktion folgt unmittelbar: $G(s, \psi^*\mathfrak{F}) = G(s, \mathfrak{F}) \times_X Y$, und $p_{s, \psi^*\mathfrak{F}}$ ist die Projektion $G(s, \mathfrak{F}) \times_X Y \rightarrow Y$ auf den zweiten Faktor.

Es gibt also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G(s, \psi^*\mathfrak{F}) & \xrightarrow{\psi} & G(s, \mathfrak{F}) \hookrightarrow X \times G(s, q) \\ p_{s, \psi^*\mathfrak{F}} \downarrow & \searrow & \downarrow p_{s, \mathfrak{F}} \\ Y & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

Weil $\mathfrak{G}$ Quotient von $\psi^*\mathfrak{F}$ ist, gibt es einen Epimorphismus $\mathcal{O}_Y^q \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow 0$. Nach 1.12 existiert daher genau eine holomorphe Abbildung $S: Y \rightarrow G(s, q)$ so, daß $(\mathcal{O}_Y^q \rightarrow \mathfrak{G}) = (S^*\mathcal{O}_G^q(s, q) \rightarrow S^*\mathfrak{F}_s)$, $\mathcal{O}_G^q(s, q) \rightarrow \mathfrak{F}_s$ gemäß 1.12.

Der Graph $Z_{\mathfrak{G}, S} \hookrightarrow Y \times G(s, q)$ ist Unterraum von $G(s, \psi^*\mathfrak{F})$ (klar nach Konstruktion). Für $\chi := \nabla \circ (\text{id}_Y, S)$ gilt: $p_{s, \mathfrak{F}} \circ \chi = \psi$ und $\mathfrak{G} = \chi^*\mathfrak{F}_s$. Die Eindeutigkeit von χ folgt aus der Eindeutigkeit von S .

2.2 Bemerkung: Aus der universellen Eigenschaft von

$p_{s, \mathfrak{F}}: G(s, \mathfrak{F}) \rightarrow X$ folgt unmittelbar:

- Ist $\mathfrak{F}$ lokal frei vom Rang r , so ist $p_{r, \mathfrak{F}}$ biholomorph.
- Für jede offene Menge $U \subset X$ ist die Einschränkung $p_{s, \mathfrak{F}}|_{p_{s, \mathfrak{F}}^{-1}(U)}: p_{s, \mathfrak{F}}^{-1}(U) \rightarrow U$ isomorph zu $p_{s, \mathfrak{F}|_U}: G(s, \mathfrak{F}|_U) \rightarrow U$.
- Für jedes $Z \hookrightarrow X$ ist $p_{s, \mathfrak{F}_Z}: G(s, \mathfrak{F}_Z) \rightarrow Z$ gegeben durch die Einschränkung $p_{s, \mathfrak{F}}^{-1}(Z) \rightarrow Z$ von $p_{s, \mathfrak{F}}$ auf das analytische Urbild von Z unter $p_{s, \mathfrak{F}}$.

2.3 Folgerung: Sei X ein komplexer Raum, und sei $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang r , der außerhalb einer analytisch dünnen Menge $S(\mathfrak{F})$ lokal frei ist.

Dann gibt es eine eigentliche Modifikation $\pi_{\mathfrak{F}}: X_{\mathfrak{F}} \rightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\pi_{\mathfrak{F}}^* \mathfrak{F}$ besitzt einen lokal freien Quotienten vom Rang r .
- (ii) Ist $\psi: Y \rightarrow X$ holomorph, ist $\psi^{-1}(S(\mathfrak{F}))$ analytisch dünn in Y , und besitzt $\psi^* \mathfrak{F}$ einen lokal freien Quotienten vom Rang r , so gibt es genau eine holomorphe Abbildung $\chi: Y \rightarrow X_{\mathfrak{F}}$ mit $\pi_{\mathfrak{F}} \circ \chi = \psi$.

Beweis: Wir zeigen: Es gibt einen Unterraum $X_{\mathfrak{F}}$ von $G(r, \mathfrak{F})$, derart daß $p_{r, \mathfrak{F}}$ eine eigentliche Modifikation $X_{\mathfrak{F}} \rightarrow X$ induziert.

Nach 2.2 induziert $p_{r, \mathfrak{F}}$ eine biholomorphe Abbildung $G(r, \mathfrak{F}) - p_{r, \mathfrak{F}}^{-1}(S(\mathfrak{F})) \rightarrow X - S(\mathfrak{F})$. Nach (1.6b) folgt mit $X_{\mathfrak{F}} := \text{clos}_{G(r, \mathfrak{F})}(G(r, \mathfrak{F}) - p_{r, \mathfrak{F}}^{-1}(S(\mathfrak{F})))$: $p_{r, \mathfrak{F}}$ induziert eine eigentliche Modifikation $\pi_{\mathfrak{F}}: X_{\mathfrak{F}} \rightarrow X$.

Trivialerweise besitzt $\pi_{\mathfrak{F}}^* \mathfrak{F}$ einen lokal freien Quotienten vom Rang r (nämlich die Einschränkung von $\mathfrak{F}_{r, \mathfrak{F}}$ auf $X_{\mathfrak{F}}$).

Sei $\psi: Y \rightarrow X$ holomorph, derart daß $\psi^{-1}(S(\mathfrak{F}))$ analytisch dünn in Y ist, und sei $\mathcal{Q}$ ein lokal freier Quotient vom Rang r von $\psi^* \mathfrak{F}$. Nach 2.1 gibt es eine holomorphe Abbildung $\chi: Y \rightarrow G(r, \mathfrak{F})$ mit $p_{r, \mathfrak{F}} \circ \chi = \psi$. Die Restriktion $\chi|_{Y - \psi^{-1}(S(\mathfrak{F}))} \rightarrow G(r, \mathfrak{F}) - p_{r, \mathfrak{F}}^{-1}(S(\mathfrak{F}))$ ist durch ψ eindeutig bestimmt, weil $p_{r, \mathfrak{F}}$ über $X - S(\mathfrak{F})$ biholomorph ist. Also ist auch χ eindeutig bestimmt, weil $\psi^{-1}(S(\mathfrak{F}))$ analytisch dünn in Y ist.

Es ist $Y = \text{clos}_Y(Y - \psi^{-1}(S(\mathfrak{U}))) = \text{clos}_Y(Y - \chi^{-1}(p_{r,\mathfrak{U}}^{-1}(S(\mathfrak{U}))))$

$$\xrightarrow{1.3d} \chi^{-1}(\text{clos}_{G(r,\mathfrak{U})}(G(r,\mathfrak{U}) - p_{r,\mathfrak{U}}^{-1}(S(\mathfrak{U})))) = \chi^{-1}(X_{\mathfrak{U}}) \rightarrow Y,$$

d.h. $\chi(Y) \subset X_{\mathfrak{U}}$.

Für reduziertes X wurde 2.3 von Rossi [24] und Riemenschneider [22] direkt (ohne Verwendung von 2.1) bewiesen.

2.4 Definition: Sei X ein komplexer Raum, und sei $\mathfrak{U}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang r . Die Singularitätenmenge $S(\mathfrak{U}) := \{x \in X : \mathfrak{U}_x \text{ nicht frei}\}$ von $\mathfrak{U}$ sei analytisch dünn in X . Eine eigentliche Modifikation $\pi_{\mathfrak{U}}: X_{\mathfrak{U}} \rightarrow X$ heißt monoidale Transformation bezüglich $\mathfrak{U}$, wenn gilt:

- (i) $\pi_{\mathfrak{U}}^* \mathfrak{U}$ besitzt einen lokal freien Quotienten vom Rang r .
- (ii) Ist $\psi: Y \rightarrow X$ holomorph, ist $\psi^{-1}(S(\mathfrak{U}))$ analytisch dünn in Y , und besitzt $\psi^* \mathfrak{U}$ einen lokal freien Quotienten vom Rang r , so gibt es genau eine holomorphe Abbildung $\chi: Y \rightarrow X_{\mathfrak{U}}$ mit $\pi_{\mathfrak{U}} \circ \chi = \psi$.

Aus der universellen Eigenschaft (2.4 ii) folgt: Die monoidale Transformation bezüglich $\mathfrak{U}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

2.5 Beispiel: Sei $Z \hookrightarrow X$ ein analytisch dünner Unterraum mit Ideal $\mathfrak{z}$, und sei $\pi_Z: X_Z \rightarrow X$ die monoidale Transformation bezüglich Z (siehe [4]).

Dann sind $\pi_{\mathfrak{z}}$ gemäß 2.4 und π_Z isomorph.

Für einen kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ wird $G(1, \mathfrak{F})$ mit $\mathbb{P}(\mathfrak{F})$ bezeichnet.

2.6 Bemerkungen: a) Ist $x \in X$, und ist $\mathcal{O}_{X,x}^q \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{F}_x \rightarrow 0$ ein Epimorphismus, so definiert α eine Einbettung von $\mathbb{P}(\mathfrak{F}_x) := p_{1,\mathfrak{F}}^{-1}(x)$ in $\mathbb{P}_{q-1}$ derart, daß gilt: $(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{F})_{\mathbb{P}(\mathfrak{F}_x)} \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{q-1}}(1))_{\mathbb{P}(\mathfrak{F}_x)}$.

b) Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, und sei $Z \hookrightarrow X$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $n+1$ mit Ideal $\mathfrak{z}$. Für $z \in Z$ ist dann $p_{1,\mathfrak{z}}^{-1}(z)$ nach (a) in $\mathbb{P}_n$ einbettbar.

Sei $\pi_Z: X_Z \rightarrow X$ die monoidale Transformation bezüglich Z .

Nach 2.5 läßt sich X_Z als Unterraum von $\mathbb{P}(\mathfrak{z})$ auffassen, derart, daß π_Z durch die Einschränkung von $p_{1,\mathfrak{z}}$ gegeben ist. Deshalb, und weil $\pi_Z^{-1}(Z)$ Hyperfläche in X_Z ist, folgt aus Dimensionsgründen: $X_Z = \mathbb{P}(\mathfrak{z})$, und $\pi_Z^{-1}(z) = p_{1,\mathfrak{z}}^{-1}(z) = \mathbb{P}_n$ für alle $z \in Z$. Speziell ist $(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{z})_{\pi_Z^{-1}(z)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ für alle $z \in Z$.

Nun ist $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{z} \cong \mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}'$ das Ideal von $\pi_Z^{-1}(Z)$. Daher gilt für den durch $\pi_Z^{-1}(Z)$ definierten Divisor E auf X_Z : Auf jeder Faser z_π eines $z \in Z$ ist $(\mathcal{O}_{X_Z}(E))_{z_\pi} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)$.

§ 3 Ample Geradenbündel und Divisoren

Sei X ein kompakter komplexer Raum, und sei $\mathcal{G}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1.

3.1 Definition: $\mathcal{G}$ heißt

- (i) sehr ample, falls es eine Einbettung $j: X \rightarrow \mathbb{P}_N$ so gibt, daß $\mathcal{G} \cong j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$.
- (ii) ample, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, für das $\mathcal{G}^{\otimes n}$ sehr ample ist.

Ein Geradenbündel G heißt (sehr) ample, wenn die Garbe $\mathcal{O}_X(G)$ der Schnitte in G (sehr) ample ist.

Ein Divisor D heißt (sehr) ample, wenn $\mathcal{O}_X(D)$ (sehr) ample ist.

3.2 Bemerkung: Ist $\mathcal{G}$ (sehr) ample, so auch $\mathcal{G}_Y$ für jeden Unterraum $Y \hookrightarrow X$.

Offensichtlich ist X genau dann projektiv, wenn auf X ein ampler Geradenbündel existiert.

In diesem Paragraphen werden nun charakteristische Eigenschaften ampler Geradenbündel angegeben, die nicht von der Einbettung in einen $\mathbb{P}_N$ abhängen. Daraus werden dann Projektivitätskriterien abgeleitet.

Grundlegend ist dazu folgender

3.3 Satz: Äquivalent sind:

- (i) $\mathfrak{F}$ ist ampel.
- (ii) Zu jedem kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $H^q(X, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes n}) = 0$ für alle $q \geq 1, n \geq n_0$.
- (iii) Zu jedem kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes n}$ für alle $n \geq n_0$ global erzeugt ist.

Beweis: Griffiths [9].

3.4 Korollar: a) Ist $\mathfrak{F}$ ampel, so auch $\mathfrak{F}^{\otimes k}$ für alle $k \geq 1$.

b) Ist $\mathfrak{F}$ ampel, so ist $\mathfrak{F}_Y^{\otimes k}$ nicht trivial für alle $Y \hookrightarrow X$ von positiver Dimension und alle ganzen Zahlen $k \neq 0$.

Beweis: a) Sei $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul, und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $H^q(X, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes n}) = 0$ für alle $n \geq n_0, q \geq 1$.

Dann ist auch $H^q(X, \mathfrak{F} \otimes (\mathfrak{F}^{\otimes k})^{\otimes n}) = H^q(X, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes kn}) = 0$ für alle $n \geq n_0, q \geq 1$. Nach 3.3 ist $\mathfrak{F}^{\otimes k}$ ampel.

b) Sei $Y \hookrightarrow X, 0 \neq k \in \mathbb{Z}$ mit $\mathfrak{F}_Y^{\otimes k} \cong \mathcal{O}_Y$. Dann ist auch $\mathfrak{F}_Y^{\otimes |k|} \cong \mathcal{O}_Y$. $\mathfrak{F}_Y^{\otimes |k|}$ ist nach 3.2 und nach (a) ampel. Nach (3.3ii) folgt:

$H^q(Y, \mathfrak{F}) = 0$ für alle kohärenten $\mathcal{O}_Y$ -Moduln $\mathfrak{F}$. Also ist Y ein kompakter Steinscher Raum, d.h. $\dim Y = 0$.

In Verallgemeinerung von 3.2 gilt:

3.5 Lemma: Sei Y ein kompakter komplexer Raum, und sei

$\varphi: Y \rightarrow X$ eine endliche holomorphe Abbildung.

Ist $\mathfrak{F}$ ampel, so auch $\varphi^* \mathfrak{F}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Dann ist $\varphi_* \mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul.

Nach (3.3iii) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\varphi_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}^{\otimes n}$ für alle $n \geq n_0$ global erzeugt ist. Für alle $n \geq n_0$ gibt es also eine exakte Sequenz

$$0_X^{p_n} \rightarrow \varphi_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}^{\otimes n} \rightarrow 0.$$

Aus den entsprechenden exakten Urbildsequenzen

$$0_Y^{p_n} = \varphi^* 0_X^{p_n} \rightarrow \varphi^*(\varphi_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}^{\otimes n}) \rightarrow 0$$

ergibt sich:

$(\varphi^* \varphi_* \mathcal{F}) \otimes (\varphi^* \mathcal{G})^{\otimes n} = \varphi^*(\varphi_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}^{\otimes n})$ ist für alle $n \geq n_0$ global erzeugt.

Die kanonische Abbildung $\varphi^* \varphi_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ist surjektiv, weil φ endlich ist.

Also gibt es für alle $n \geq n_0$ eine exakte Sequenz

$$0_Y^{p_n} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \varphi^* \mathcal{G}^{\otimes n} \rightarrow 0,$$

d.h.: $\mathcal{F} \otimes (\varphi^* \mathcal{G})^{\otimes n}$ ist für alle $n \geq n_0$ global erzeugt.

Nach 3.3 ist $\varphi^* \mathcal{G}$ ampel.

Bemerkung: 3.5 läßt sich nicht weiter verallgemeinern:

Ist $\varphi: Y \rightarrow X$ eine beliebige holomorphe Abbildung, und ist $\varphi^* \mathcal{G}$ ampel, so ist φ endlich: $\varphi^* \mathcal{G}$ ist längs jeder Faser von φ trivial, also sind die Fasern nach (3.4b) nulldimensional.

3.6 Korollar: Sei $\varphi: Y \rightarrow X$ eine endliche holomorphe Abbildung. Ist X projektiv, so auch Y .

3.7 Folgerung: a) Ist $\mathcal{G}$ global erzeugt, und ist $\mathcal{G}$ längs keines positiv-dimensionalen Unterraums $Z \hookrightarrow X$ trivial, so ist $\mathcal{G}$ ampel.

b) Sei D ein basispunktfreier Divisor auf X mit folgender Eigenschaft: Zu jeder positiv-dimensionalen analytischen Menge A in X gibt es einen zu D äquivalenten Divisor D' , dessen Träger A trifft und A nicht enthält.

Dann ist D ampel.

Beweis: a) Nach 1.12 definieren die globalen Schnitte in $\mathcal{L}$ eine holomorphe Abbildung $s: X \rightarrow \mathbb{P}_N$, für die gilt: $\mathcal{L} = s^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$. Also ist $\mathcal{L}$ längs jeder Faser von s trivial. Notwendig ist dann s endlich, also X projektiv nach 3.5.

b) Wir zeigen: Für $\mathcal{L} := \mathcal{O}_X(D)$ sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt.

$\mathcal{L}$ ist global erzeugt, weil D basispunktfrei ist.

Sei $Z \hookrightarrow X$, und sei $\mathcal{L}_Z$ trivial.

Annahme: $\dim Z > 0$.

Sei A eine positiv-dimensionale irreduzible Komponente von Z_{red} , und sei D' ein zu D äquivalenter Divisor, dessen Träger A trifft und A nicht enthält. D' definiert eine Hyperfläche d in A . Das Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_A$ von d ist isomorph zu $\mathcal{L}_A^{\otimes(-1)}$, also isomorph zu $\mathcal{O}_A$. Insbesondere ist $H^0(X, \mathcal{I}) \cong \mathbb{C} \cong H^0(A, \mathcal{O}_A)$, d.h. $d = \emptyset$, im Widerspruch zur Konstruktion von d .

3.8 Folgerung: a) Ist $\mathcal{L}$ ampel, und ist $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1, so existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ für alle $m \geq m_0$ ampel ist.

b) Seien D, E Divisoren auf X , D ampel. Dann gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $mD + E$ für alle $m \geq m_0$ ampel ist.

Beweis: a) Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathcal{O}_X^{\otimes n} \otimes \mathcal{E}$ und $\mathcal{O}_X^{\otimes n}$ für alle $n \geq n_0$ global erzeugt sind. Sei $m_0 := 2n_0 + 2$.

Sei $m \geq m_0$, $r := m - n_0 - 1$.

Dann ist $\mathcal{O}_X^{\otimes m} \otimes \mathcal{E} = \mathcal{O}_X^{\otimes (n_0+1)} \otimes (\mathcal{O}_X^{\otimes r} \otimes \mathcal{E})$ global erzeugt, als Tensorprodukt global erzeugter $\mathcal{O}_X$ -Moduln.

Sei $Z \hookrightarrow X$, $\dim Z > 0$.

Wäre $(\mathcal{O}_X^{\otimes m} \otimes \mathcal{E})_Z$ trivial, so wäre $\mathcal{O}_Z^{\otimes r} \otimes \mathcal{E}_Z = \mathcal{O}_Z^{\otimes (-n_0-1)}$.

Insbesondere wäre sowohl $\mathcal{O}_Z^{\otimes (n_0+1)}$ als auch $\mathcal{O}_Z^{\otimes (-n_0-1)}$ global erzeugt. Nach 1.9 würde folgen: Für jede irreduzible Komponente A von Z_{red} ist $\mathcal{O}_A^{\otimes (n_0+1)}$ trivial, also nicht ampel, ein Widerspruch.

Also ist $\mathcal{O}_X^{\otimes m} \otimes \mathcal{E}$ für alle $m \geq m_0$ global erzeugt und längs keines positivdimensionalen Unterraums von X trivial, nach 3.7 somit ampel.

b) Nach (a) gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so daß $\mathcal{O}_X(mD+E) = \mathcal{O}_X(D)^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_X(E)$ für alle $m \geq m_0$ ampel ist. Daraus folgt die Behauptung.

3.9 Beispiel: Sei T ein eindimensionaler Torus, $x \in T$ ein (reduzierter) Punkt, D_x der durch x definierte Divisor.

D_x ist ampel, aber nicht basispunktfrei, also auch nicht sehr ampel:

Jede meromorphe Funktion auf T , die in $T - \{x\}$ holomorph ist und in x höchstens eine einfache Polstelle hat, ist konstant, also $H^0(T, \mathcal{O}_T(D_x)) = H^0(T, \mathcal{O}_T) = \mathbb{C}$. Wäre D_x basispunktfrei, so wäre $\mathcal{O}_T(D_x)$, und damit auch das Ideal von D_x , trivial, d.h. $\{x\} = \text{supp } D_x = \emptyset$.

$2 \cdot D_x$ ist basispunktfrei: Es gibt eine meromorphe Funktion auf T , die in $T - \{x\}$ holomorph ist und in x eine zweifache Polstelle hat. Also gibt es einen zu $2 \cdot D_x$ äquivalenten effektiven Divisor, dessen Träger in $T - \text{supp } 2D_x$ liegt. Für $2 \cdot D_x$ sind daher die Voraussetzungen von (3.7b) erfüllt, d.h. $2 \cdot D_x$ ist ampel, also auch D_x .

3.10 Lemma: $\mathfrak{G}$ ist genau dann ampel, wenn $\mathfrak{G}_{\text{red}}$ es ist.

Beweis: Nach 3.2 ist nur zu zeigen: Ist $\mathfrak{G}_{\text{red}}$ ampel, so auch $\mathfrak{G}$.

Sei $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul, und sei $\mathfrak{N} := \mathfrak{N}_X \subset \mathcal{O}_X$ das Nilradikal von $\mathcal{O}_X$. Weil X kompakt ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{N}^k = 0$. Sei k minimal mit dieser Eigenschaft.

Für $1 \leq \kappa \leq k$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachtet man die exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow (\mathfrak{N}^\kappa \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n} \rightarrow (\mathfrak{N}^{\kappa-1} \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{F}_\kappa \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n} \rightarrow 0, \quad (*)$$

wobei $\mathfrak{F}_\kappa := (\mathfrak{N}^{\kappa-1} \cdot \mathfrak{F}) / (\mathfrak{N}^\kappa \cdot \mathfrak{F})$. $\mathfrak{F}_\kappa$ läßt sich wegen $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{F}_\kappa = 0$ als

kohärenter $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$ -Modul auffassen. $\mathfrak{F}_\kappa \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}$ ist als $\mathcal{O}_X$ -Modul isomorph zu $\mathfrak{F}_\kappa \otimes \mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n} = \mathfrak{F}_\kappa \otimes \mathfrak{G}_{\text{red}}^{\otimes n}$.

Weil $\mathfrak{G}_{\text{red}}$ ampel ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $H^q(X, \mathfrak{F}_\kappa \otimes \mathfrak{G}_{\text{red}}^{\otimes n}) = 0$ für $q \geq 1$.

Aus den zu (*) gehörigen Kohomologiesequenzen ergibt sich daher für $n \geq n_0$, $q \geq 2$:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow 0 \rightarrow H^q(X, (\mathfrak{N}^\kappa \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) &\rightarrow H^q(X, (\mathfrak{N}^{\kappa-1} \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) \rightarrow 0 \\ &\parallel \\ H^{q-1}(X, \mathfrak{F}_\kappa \otimes \mathfrak{G}_{\text{red}}^{\otimes n}) \end{aligned}$$

ist exakt, ebenso

$$H^1(X, (\mathfrak{N}^k \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) \rightarrow H^1(X, (\mathfrak{N}^{k-1} \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) \rightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$H^1(X, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n})$$

Also ist für $q \geq 2$

$$H^q(X, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) = H^q(X, (\mathfrak{N}^{1-1} \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) \cong H^q(X, (\mathfrak{N}^k \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) = 0,$$

und $0 = H^1(X, (\mathfrak{N}^k \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) \rightarrow H^1(X, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n})$ ist surjektiv,

d.h. $H^1(X, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) = 0$.

Nach (3.3ii) ist $\mathfrak{G}$ ampel.

3.11 Lemma: Seien $R_1, \dots, R_k$ die irreduziblen Komponenten von X gemäß 1.4.

$\mathfrak{G}$ ist genau dann ampel, wenn $\mathfrak{G}_{R_\kappa}$ für alle $\kappa = 1, \dots, k$ ampel ist.

Beweis: Ist $\mathfrak{G}$ ampel, so sind nach 3.2 auch alle $\mathfrak{G}_{R_\kappa}$ ampel.

Seien alle $\mathfrak{G}_{R_\kappa}$ ampel.

Vollständige Induktion nach k : Ist $k=1$, so ist $X=R_1$, also $\mathfrak{G}$ ampel.

$k \rightarrow k+1$: Sei $R := R_1 \cup \dots \cup R_k$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathfrak{G}_R$ ampel.

Sei $\bar{X} := R \cup R_{k+1}$; sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}_{\bar{X}}$ das Ideal von R in $\bar{X}$, $\mathcal{S}$ das Ideal von R_{k+1} in $\bar{X}$. Notwendig gilt: $\mathcal{R} \cdot \mathcal{S} = 0$, d.h. $\mathcal{R}$ läßt sich als kohärenter $\mathcal{O}_{R_{k+1}}$ -Modul auffassen.

Somit ist $H^q(X, (\mathcal{R} \cdot \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}_{\bar{X}}^{\otimes n}) = 0$ für alle kohärenten $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -Moduln $\mathfrak{F}$, alle $q \geq 1$, und alle hinreichend großen n . (*)

Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -Modul $\mathfrak{F}$ ergibt sich aus den zu

$$0 \rightarrow (\mathcal{R} \cdot \mathcal{F}) \otimes \mathcal{S}_{\bar{X}}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{S}_{\bar{X}}^{\otimes n} \rightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{R} \cdot \mathcal{F}) \otimes \mathcal{S}_{\bar{X}}^{\otimes n} \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

gehörigen Kohomologiesequenzen:

$H^q(\bar{X}, (\mathcal{R} \cdot \mathcal{F}) \otimes \mathcal{S}_{\bar{X}}^{\otimes n}) \rightarrow H^q(\bar{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{S}_{\bar{X}}^{\otimes n})$ ist für alle $q \geq 1$ und alle hinreichend großen n surjektiv, denn nach Induktionsvoraussetzung ist für alle $q \geq 1$ und alle $n \gg 0$

$$H^q(\bar{X}, (\mathcal{F}/\mathcal{R} \cdot \mathcal{F}) \otimes \mathcal{S}_{\bar{X}}^{\otimes n}) \cong H^q(\bar{X}, \mathcal{F}_R \otimes \mathcal{S}_R^{\otimes n}) = 0.$$

Daraus und aus (*) folgt: $H^q(\bar{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{S}_{\bar{X}}^{\otimes n}) = 0$ für $q \geq 1$, $n \gg 0$, d.h. $\mathcal{S}_{\bar{X}}$ ist ampel auf $\bar{X}$.

Also ist auch $\mathcal{S}_{\bar{X}_{\text{red}}}$ ampel; wegen $X_{\text{red}} = \bar{X}_{\text{red}}$ folgt aus 3.10: $\mathcal{S}$ ist ampel.

3.12 Satz (Grauert [6]): Sei G ein Geradenbündel auf X , und sei $\mathcal{S} := \mathcal{O}_X(G)$. Dann sind äquivalent:

- (i) G ist ampel.
- (ii) Zu jeder positiv-dimensionalen irreduziblen analytischen Menge A in X gibt es eine natürliche Zahl $n(A)$ und einen Schnitt s über A in $G_A^{\otimes n(A)}$, der in A eine Nullstelle hat, und der auf A nicht identisch verschwindet.
- (iii) Zu jeder positiv-dimensionalen irreduziblen analytischen Menge A in X gibt es eine natürliche Zahl $n(A)$ so, daß gilt: $\mathcal{S}_A^{\otimes n(A)}$ ist nicht trivial längs A , und es ist $h^0(A, \mathcal{S}_A^{\otimes n(A)}) > 0$.
- (iv) Für jede positiv-dimensionale irreduzible analytische Menge A in X ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} h^0(A, \mathcal{S}_A^{\otimes n}) \geq 2$.

Beweis: Wir zeigen: (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) und (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Die nicht identisch verschwindenden Schnitte mit Nullstelle in $G_A^{\otimes n}$ entsprechen umkehrbar eindeutig den nicht surjektiven, von 0 verschiedenen Morphismen $0_A \rightarrow \mathcal{S}_A^{\otimes n}$. Ein Morphismus $\neq 0$ $0_A \rightarrow \mathcal{S}_A^{\otimes n}$ ist genau dann nicht surjektiv, wenn $\mathcal{S}_A^{\otimes n}$ nicht trivial ist.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Es gibt ein $n(A) \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathcal{S}_A^{\otimes n}$ für $n \geq n(A)$ global erzeugt ist. Nach 1.12 gibt es eine holomorphe Abbildung $s_n: A \rightarrow \mathbb{P}_N$ mit $\mathcal{S}_A^{\otimes n} = s_n^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}$, wobei $N = h^0(A, \mathcal{S}_A^{\otimes n}) - 1$. Wäre $N = 0$, so wäre notwendig $\mathcal{S}_A^{\otimes n}$ trivial auf A , also nicht ampel.

Also ist $h^0(A, \mathcal{S}_A^{\otimes n}) \geq 2$ für alle $n \geq n(A)$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Trivialerweise gibt es ein $n(A) \in \mathbb{N}$ so, daß $h^0(A, \mathcal{S}_A^{\otimes n(A)}) \geq 2$. Also gibt es einen von 0 verschiedenen Morphismus $0_A \rightarrow \mathcal{S}_A^{\otimes n(A)}$.

Wäre $\mathcal{S}_A^{\otimes n(A)}$ trivial, so wäre $h^0(A, \mathcal{S}_A^{\otimes n(A)}) = h^0(A, 0_A) = 1$, im Widerspruch zur Definition von $n(A)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Vollständige Induktion nach $\dim X$:

Ist $\dim X = 0$, so ist $\mathcal{S}$ trivialerweise ampel.

Sei $\dim X > 0$, und sei $\mathcal{S}_Y$ für alle $Y \hookrightarrow X$ der Dimension $\leq \dim X - 1$ ampel.

Nach 3.10 und 3.11 kann X reduziert und irreduzibel angenommen werden.

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $h^0(X, \mathcal{S}^{\otimes n}) \geq 1$. Ohne Einschränkung sei $n = 1$, denn es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{S}^{\otimes n}$ ampel ist.

Sei $0 \neq s \in H^0(X, \mathcal{O})$. Nach 1.9 definiert s ein zu $\mathcal{O}^{\otimes(-1)}$ isomorphes inversibles Ideal in $\mathcal{O}_X$. D sei die durch dieses Ideal $\mathcal{O}$ definierte Hyperfläche. Wegen $\dim D \leq \dim X - 1$ ist $\mathcal{O}_D$ ampel auf D . Insbesondere gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für $k \geq k_0$ gilt: $H^q(D, \mathcal{O}_D^{\otimes k}) = 0$ für alle $q \geq 1$. (*)

Die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$ induziert wegen $\mathcal{O} \cong \mathcal{O}^{\otimes(-1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^{\otimes(k-1)} \rightarrow \mathcal{O}^{\otimes k} \rightarrow \mathcal{O}_D^{\otimes k} \rightarrow 0.$$

Aus den zugehörigen Kohomologiesequenzen ergibt sich für $k \geq k_0$, $q \geq 1$: $H^q(X, \mathcal{O}^{\otimes(k-1)}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{O}^{\otimes k})$ ist surjektiv (wegen (*)).

Deshalb und wegen $h^1(X, \mathcal{O}^{\otimes k_0}) < \infty$ gibt es ein $k_1 \geq k_0$ so, daß $H^1(X, \mathcal{O}^{\otimes(k-1)}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^{\otimes k})$ für alle $k \geq k_1$ bijektiv ist.

Dann ist $H^0(X, \mathcal{O}^{\otimes k}) \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D^{\otimes k})$ für alle $k \geq k_1$ surjektiv.

Es gibt ein $k_2 \geq k_1$ so, daß $\mathcal{O}_D^{\otimes k}$ für alle $k \geq k_2$ global erzeugt ist.

Sei $x \in D$. Dann ist für $k \geq k_2$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{O}^{\otimes k}) & \twoheadrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_D^{\otimes k}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X^{\otimes k} / \mathcal{O}_{X,x} \cdot \mathcal{O}_X^{\otimes k} & \cong & \mathcal{O}_{D,x}^{\otimes k} / \mathcal{O}_{D,x} \cdot \mathcal{O}_{D,x}^{\otimes k} \end{array}$$

kommutativ. Die mit $\twoheadrightarrow$ bezeichneten Abbildungen sind surjektiv. Also ist auch der vertikale Pfeil links surjektiv, d.h. $H^0(X, \mathcal{O}^{\otimes k})$ erzeugt $\mathcal{O}_X^{\otimes k}$ über $\mathcal{O}_{X,x}$.

s definiert einen Schnitt $s^{\otimes k} \in H^0(X, \mathcal{O}^{\otimes k})$. $s^{\otimes k}$ erzeugt $\mathcal{O}^{\otimes k}$

in jedem Punkt aus $X - D$, denn $s^{\otimes k}: \mathcal{O}_X|_{X-D} \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes k}|_{X-D}$ ist surjektiv.

Insgesamt: $\mathcal{L}^{\otimes k}$ ist für alle $k \geq k_2$ global erzeugt.

Sei $k \geq k_2$ fest.

Beh.: $\mathcal{L}^{\otimes k}$ ist längs keines positiv-dimensionalen Unter-
raums von X trivial.

Bew.: Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{L}^{\otimes k}$ nicht trivial ist, denn nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathcal{L}_Z$ für jeden echten Unter-
raum Z von X ampel.

s definiert einen von 0 verschiedenen, nicht surjektiven
Morphismus $s^{\otimes k}: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes k}$. Wäre $\mathcal{L}^{\otimes k}$ trivial, so wäre
 $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$, da X reduziert und irreduzibel.

Insbesondere wäre jeder von 0 verschiedene Morphismus
 $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes k}$ surjektiv.

Nach 3.7 ist $\mathcal{L}^{\otimes k}$ ampel. Also ist auch $\mathcal{L}$ ampel.

3.13 Folgerung: a) Ist $\mathcal{L}$ längs keiner positiv-dimensionalen
analytischen Menge trivial, und ist $\mathcal{L}$ außerhalb einer
diskreten Menge global erzeugt, so ist $\mathcal{L}$ ampel.

b) Sei D ein effektiver Divisor auf X mit diskreten Basis-
punkten. Zu jeder positiv-dimensionalen analytischen Menge
in X existiere ein zu D äquivalenter Divisor, dessen Träger
 A trifft und A nicht enthält.

Dann ist D ampel.

Beweis: Für $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{O}_X(D)$ gilt (3.12iii).

3.14 Korollar: Sei $\dim X = 1$, und sei X_{red} irreduzibel.

- a) Ist $\mathfrak{H}$ nicht trivial, und ist $h^0(X, \mathfrak{H}) \geq 1$, so ist $\mathfrak{H}$ ampel.
- b) Jeder effektive nichttriviale Divisor D auf X ist ampel.

Beweis: Für $\mathfrak{H}$ bzw. D gilt 3.13.

3.15 Korollar: Ist $\dim X = 1$, so ist X projektiv.

Beweis: Man wähle in jeder irreduziblen Komponente R_κ von X einen Punkt x_κ so, daß $\mathcal{O}_{X, x_\kappa}$ einen Nichtnullteiler f_κ enthält.

Das Ideal $\mathcal{C}$, definiert durch

$$\mathcal{C}_x := \begin{cases} f_\kappa \cdot \mathcal{O}_{X, x}, & \text{falls } x \in \{x_1, \dots, x_\kappa\}, \\ \mathcal{O}_{X, x} & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt einen effektiven Divisor D auf X , der auf jeder irreduziblen Komponente von X der Voraussetzung von (3.14b) genügt.

Nach 3.11 ist D ampel.

In Verallgemeinerung von 3.13 gilt:

3.16 Folgerung: Sei X irreduzibel.

- a) Seien $s_0, \dots, s_N \in H^0(X, \mathfrak{H})$. Sei $C := \{x \in X : \text{der durch die } s_v \text{ definierte Morphismus } \mathcal{O}_{X, x}^{N+1} \rightarrow \mathfrak{H}_x \text{ ist nicht surjektiv}\}$. Ist $\mathfrak{H}_C$ ampel auf C , und ist $\mathfrak{H}$ längs keiner positiv-dimensionalen analytischen Menge trivial, so ist $\mathfrak{H}$ ampel.
- b) Sei D ein effektiver Divisor auf X so, daß $X - D$ keine kompakten analytischen Mengen positiver Dimension enthält.
Ist $\mathcal{O}_D(D)$ ampel auf D , so ist D ampel.

Beweis: Sei A eine irreduzible analytische Menge positiver Dimension in X .

a) Ist $A \subset C$, so ist $\mathcal{O}_A$ ampel. Es gibt dann ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $h^0(A, \mathcal{O}_A^{\otimes n}) \geq 1$.

Ist $A \not\subset C$, so gibt es nach Definition von C ein $1 \leq v \leq N$ so, daß s_v einen von 0 verschiedenen Schnitt $\in H^0(A, \mathcal{O}_A)$ induziert; also wieder $h^0(A, \mathcal{O}_A) \geq 1$.

Somit sind die Voraussetzungen von (3.12iii) erfüllt, d.h. $\mathcal{O}_A$ ist ampel.

b) Ist $A \subset D$, so ist $\mathcal{O}_A(D)$ ampel.

Andernfalls gibt es einen Schnitt in $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, der einen von 0 verschiedenen, und (wegen $A \cap D \neq \emptyset$) nicht surjektiven Morphismus $\mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_A(D)$ induziert.

Nach (3.12iii), angewandt auf $\mathcal{O}_X(D)$ folgt: D ist ampel.

Aus 3.13 ergibt sich noch:

3.17 Satz: Sei Y ein projektiv-algebraischer Raum, und sei $\pi: Y \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation mit diskretem Zentrum $Z(\pi)$ (vgl. 1.6). X sei in jedem Punkt von $Z(\pi)$ Mannigfaltigkeit.

Dann ist auch X projektiv.

Beweis: Sei H ein Hyperebenenschnitt in Y , der keine irreduzible Komponente der Ausnahmemenge $A(\pi)$ von π enthält.

Notwendig hat dann $\pi(H)$ in jedem $x \in X$ die Kodimension 1.

$\pi(H) - Z(\pi)$ ist Hyperfläche in $X - Z(\pi)$.

Sei $S(X)$ die Singularitätenmenge von X .

Nach (1.5₀) gibt es eine Hyperfläche H' in $X - S(X)$, die auf $X - (S(X) \cup Z(\pi))$ mit $\pi(H) - Z(\pi)$ übereinstimmt, und die den gleichen Träger wie $\pi(H) - S(X)$ hat.

H' und $\pi(H) - Z(\pi)$ definieren eine Hyperfläche $\bar{H}$ auf $(X - S(X)) \cup (X - Z(\pi)) = X - (S(X) \cap Z(\pi)) = X$. Es ist $|\bar{H}| = |\pi(H)|$, und $\bar{H} - Z(\pi) = \pi(H) - Z(\pi)$.

Sei $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_X$ das Ideal von $\bar{H}$.

Ist $f \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(H)) \subset H^0(Y, \mathbb{R}_Y)$, so gilt für die durch f bestimmte meromorphe Funktion g auf X : $g \cdot (\mathfrak{A} | (X - Z(\pi))) \subset \mathcal{O}_X | (X - Z(\pi))$. (*)

Wir zeigen: $\bar{H}$ definiert einen ampel Divisor auf X .

Wegen 3.11 kann X ohne Einschränkung irreduzibel angenommen werden.

Ist $\dim X \leq 1$, so ist $\bar{H}$ nach 3.14 ampel.

Andernfalls ist $\text{codim}_X Z(\pi) \geq 2$ für alle $x \in Z(\pi)$. Weil X normal ist, folgt aus (*): $g \cdot \mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_X$, und damit $H^0(X, \pi_* \mathcal{O}_Y(H)) \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(\bar{H}))$.

Daher gilt: Ist H_1 ein zu H äquivalenter effektiver Divisor, und wird $\bar{H}_1$ analog zu $\bar{H}$ konstruiert, so ist $\bar{H}_1$ äquivalent zu $\bar{H}$. Notwendig liegen deshalb die Basispunkte von $\bar{H}$ in der diskreten Menge $Z(\pi)$, denn H ist basispunktfrei.

Ist A eine positiv-dimensionale irreduzible analytische Menge in X , so gibt es einen zu H äquivalenten effektiven Divisor H_1 , dessen Träger $\overline{\pi^{-1}(A - Z(\pi))}$ trifft, aber nicht enthält. Für $\bar{H}_1$ gilt dann: $\bar{H}_1 \cap A \neq \emptyset$ und $A \not\subset \bar{H}_1$.

Nach 3.13 ist $\bar{H}$ ampel.

3.18 Korollar: Sei X eine zweidimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Sei Y projektiv, und sei $\pi: Y \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation.

Dann ist X projektiv.

Beweis: Weil X normal ist, gilt für alle $x \in Z(\pi)$: $\dim \pi^{-1}(x) \geq 1$, also $2 = \dim X = \dim Y > \dim \pi^{-1}(Z(\pi)) \geq \dim Z(\pi) + 1$, d.h. $Z(\pi)$ ist diskret.

Nach 3.17 folgt die Behauptung.

3.19 Bemerkungen: a) Die Voraussetzung " $Z(\pi)$ nichtsingulär" in 3.17 ist wesentlich. Nach Grauert [6] gibt es einen zweidimensionalen, nicht projektiven kompakten komplexen Raum, der durch Niederblasen einer exzeptionellen analytischen Menge in einer projektiven Mannigfaltigkeit entsteht.

b) Ist $\pi: Y \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation, und ist X projektiv, so ist Y i.a. nicht projektiv. In (8.3c) wird hierfür ein Beispiel angegeben mit: $X = \mathbb{P}_4$, Y Mannigfaltigkeit, $Z(\pi)$ einpunktig, und $A(\pi) = \pi^{-1}(Z(\pi))$ nicht projektiv.

Es gilt jedoch: Ist $\pi: Y \rightarrow X$ monoidale Transformation bezüglich eines Unterraums von X , so ist mit X auch Y projektiv.

Allgemein:

3.20 Satz: Ist X projektiv, und ist $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul, so ist $\mathbb{P}(\mathfrak{F})$ projektiv.

Beweis: Sei $p := p_1, \mathfrak{F}: \mathbb{P}(\mathfrak{F}) \rightarrow X$ gemäß 2.1; $\mathfrak{I} := \mathfrak{I}_1, \mathfrak{F}$.

Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathfrak{F} \otimes \mathcal{O}_X(n)$ für alle $n \geq n_0$ global erzeugt ist. Dann ist auch $p^* \mathfrak{F} \otimes p^* \mathcal{O}_X(n) = p^*(\mathfrak{F} \otimes \mathcal{O}_X(n))$ für alle $n \geq n_0$ global erzeugt. Weil $\mathfrak{I}$ Quotient von $p^* \mathfrak{F}$ ist, folgt: $\mathfrak{I} \otimes p^* \mathcal{O}_X(n)$ ist für alle $n \geq n_0$ global erzeugt.

Sei $n \geq n_0 + 1$, und sei A eine irreduzible analytische Menge positiver Dimension in $\mathbb{P}(\mathfrak{F})$.

Annahme: $\mathfrak{I} \otimes p^* \mathcal{O}_X(n)$ ist trivial längs A .

Weil $\mathfrak{I} \otimes p^* \mathcal{O}_X(n-1)$ und $p^* \mathcal{O}_X(1)$ global erzeugt sind, folgt nach 1.9: $\mathfrak{I} \otimes p^* \mathcal{O}_X(n-1)$ und $p^* \mathcal{O}_X(1)$ sind trivial längs A .

Also ist auch $\mathfrak{I}$ trivial längs A .

Weil $p^* \mathcal{O}_X(1)$ längs A trivial ist, liegt A in einer Faser von p . Andererseits ist $\mathfrak{I}$ auf jeder Faser von p ampel (2.6).

Notwendig ist dann A nulldimensional, ein Widerspruch.

Also ist $\mathfrak{I} \otimes p^* \mathcal{O}_X(n)$ global erzeugt und längs keiner positiv-dimensionalen irreduziblen analytischen Menge trivial, somit ampel.

Bemerkung: Es gilt allgemein: Die $G(s, \mathfrak{F})$ gemäß 2.1 sind projektiv, wenn X es ist. Zum Beweis führt man den Begriff des amplen Vektorbündels ein (vgl. etwa [11]). Für geeignetes n ist dann $p_{s, \mathfrak{F}}^* \mathcal{O}_X(n) \otimes \mathfrak{I}_{s, \mathfrak{F}}$ ein amples Vektorbündel.

3.21 Korollar: Sei X projektiv, $Z \hookrightarrow X$, und sei $\pi_Z: X_Z \rightarrow X$ die monoidale Transformation bezüglich Z .

Dann ist X_Z projektiv.

Beweis: Sei $\mathfrak{z}$ das Ideal von Z . Dann ist X_Z ein abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{P}(\mathfrak{z})$, also projektiv.

Nach 3.21 und (3.19b) folgt: Es gibt eigentliche Modifikationen, die keine monoidalen Transformationen sind.

Aus dem Beweis von 3.20 ergibt sich noch:

3.22 Korollar: Sei X projektiv, $Z \hookrightarrow X$, und sei $\pi_Z: X_Z \rightarrow X$ die monoidale Transformation bezüglich Z . Sei D ein ample Divisor auf X , und sei E der durch die Hyperfläche $\pi_Z^{-1}(Z)$ definierte Divisor auf X_Z .

Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $n\pi_Z^*D - E$ ample ist.

Beweis: Sei $\mathfrak{z}$ das Ideal von Z ; $p := p_{1,\mathfrak{z}}: \mathbb{P}(\mathfrak{z}) \rightarrow X$.

Wie im Beweis von 3.20 folgt, daß $\mathfrak{x}_{1,\mathfrak{z}} \otimes p^* \mathcal{O}_X(nD)$ für geeignetes n ample ist.

Die Einschränkung $(\mathfrak{x}_{1,\mathfrak{z}})_{X_Z}$ von $\mathfrak{x}_{1,\mathfrak{z}}$ auf den Unterraum X_Z ist isomorph zum Ideal von E , d.h. $(\mathfrak{x}_{1,\mathfrak{z}})_{X_Z} \cong \mathcal{O}_{X_Z}(-E)$.

Also ist $\mathcal{O}_{X_Z}(n\pi_Z^*D - E) = \pi_Z^* \mathcal{O}_X(nD) \otimes \mathcal{O}_{X_Z}(-E)$ ample.

§ 4 Schnitzzahltheorie

Sei X ein kompakter komplexer Raum, und sei $\mathfrak{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1.

Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ ist die Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi(\mathfrak{F}) := \sum_{q \geq 0} (-1)^q h^q(X, \mathfrak{F})$ von $\mathfrak{F}$ wohldefiniert,

weil X kompakt ist.

Ist $\mathfrak{F}$ ampel, so gilt nach 3.3 für alle $n \gg 0$:

$\chi(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes n}) = h^0(X, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes n})$. Insbesondere ist nach 3.12

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \chi(\mathfrak{F}_A^{\otimes n}) \geq 2$ für jede irreduzible analytische Menge A positiver Dimension.

In diesem Paragraphen werden nun, unter Zusatzvoraussetzungen an X , Hilfsmittel bereitgestellt, die es ermöglichen, das Wachstum von $\chi(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes n})$ für $n \rightarrow \infty$ zu untersuchen.

Damit wird dann in § 5 unter anderem gezeigt werden, daß $\mathfrak{F}$ ampel ist, wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \chi(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes n}) = \infty$ für alle kohärenten $\mathfrak{F}$.

4.1 Definition: a) Sei Y ein kompakter komplexer Raum. Eine holomorphe Abbildung $\pi: Y \rightarrow X$ heißt Pseudomodifikation, wenn es eine nirgends dichte analytische Menge A in X so gibt, daß $\pi^{-1}(A)$ analytisch dünn in Y ist, und die Einschränkung $\pi|_{Y - \pi^{-1}(A)}: Y - \pi^{-1}(A) \rightarrow X - A$ biholomorph ist. Ist A minimal mit dieser Eigenschaft, so heißt A Zentrum von π und wird mit $Z(\pi)$ bezeichnet. $\pi^{-1}(A)$ heißt dann Ausnahmemenge von π .

b) Eine offene Teilmenge U von X heißt schwach projektiv abschließbar, wenn es eine Pseudomodifikation $\tau_U: X_U \rightarrow X$ mit Zentrum in $X - U$ so gibt, daß $\tau_U^{-1}(U)$ Komplement des Trägers eines amplen Divisors auf X_U ist. X_U heißt dann (ein) projektiver Abschluß von U .

c) Eine offene Teilmenge U von X heißt projektiv abschließbar, wenn U schwach projektiv abschließbar ist, und wenn $X - U$ Trägermenge einer Hyperfläche auf X ist.

d) X heißt analytisches Schema, wenn X eine Überdeckung aus schwach projektiv abschließbaren Mengen besitzt.

4.2 Bemerkungen: a) Ist $\pi: Y \rightarrow X$ eine Pseudomodifikation, so definiert π eine eigentliche Modifikation $Y \rightarrow \overline{X - Z(\pi)}$. π ist also genau dann eine eigentliche Modifikation, wenn $Z(\pi)$ analytisch dünn in X ist.

b) Ist U schwach projektiv abschließbar, so ist $X - U$ eine nirgends dichte analytische Menge der Kodimension 1.

c) Ist U schwach projektiv abschließbar, so ist U Steinsch, denn U ist biholomorph äquivalent zum Komplement eines Hyperebenenchnitts in einem projektiv-algebraischen Raum. Insbesondere enthält U keine kompakten analytischen Mengen positiver Dimension.

d) Jeder projektiv-algebraische Raum ist ein analytisches Schema. Allgemein gilt: Ist S ein algebraisches Schema, und ist S_{an} der zugeordnete komplexe Raum, so ist S_{an} ein analytisches Schema. Insbesondere ist nicht jedes analytische Schema projektiv (vgl. e.g. Šafarevič [25]).

e) Mit X ist auch jedes $Z \rightarrow X$ ein analytisches Schema.

4.3 Definition: Eine Abbildung $\lambda: \{\text{kohärente } \mathcal{O}_X\text{-Moduln}\} \rightarrow \mathbb{Z}$ heißt additive Garbenfunktion, wenn für jede exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$ von kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Moduln gilt:
 $\lambda(\mathfrak{F}) = \lambda(\mathfrak{F}') + \lambda(\mathfrak{F}'')$.

4.4 Beispiele: a) Die Eulercharakteristik χ ist eine additive Garbenfunktion.

b) Ist λ eine additive Garbenfunktion, und ist $\mathfrak{B}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul, so ist λ' , definiert durch $\lambda'(\mathfrak{F}) := \lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{B})$, eine additive Garbenfunktion: Mit $0 \rightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$ ist auch $0 \rightarrow \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$ exakt, weil $\mathfrak{B}$ lokal frei ist.

c) Mit λ_1 und λ_2 sind auch $\lambda_1 + \lambda_2$ und $\lambda_1 - \lambda_2$ additive Garbenfunktionen.

Für den Rest dieses Paragraphen sei X ein analytisches Schema, λ eine additive Garbenfunktion, und $r(\lambda) := \sup \{\rho \in \mathbb{N} : \lambda(\mathfrak{F}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{F} \text{ mit } d(\mathfrak{F}) < \rho\}$.

4.5 Hilfssatz: Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ mit $d(\mathfrak{F}) \leq r := r(\lambda)$ und jeden lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{G}$ vom Rang 1 ist $\lambda(\mathfrak{F}) = \lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G})$.

Beweis: Für $d(\mathfrak{F}) < r$ ist die Behauptung trivial. Sei daher $d(\mathfrak{F}) = r$. S bezeichne den Träger von $\mathfrak{F}$.

1) Sei S irreduzibel.

Zu $x \in S$ wähle man $x \in U \subset X$ schwach projektiv abschließbar und $\tau_U: X_U \rightarrow X$ gemäß (4.1 b). Sei H ein ample Divisor auf X_U

mit $|H| = X_U - \tau_U^{-1}(U)$. Wir setzen $\bar{X} := X_U$, $\tau := \tau_U$.

H sei so gewählt, daß für $\mathcal{G} := \mathcal{O}_{\bar{X}}(H)$ gilt: $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \otimes \tau^* \mathcal{G}$ sind global erzeugt (man ersetze ggfs. H durch nH, n geeignet). Wegen $x \notin Z(\tau)$ gibt es genau ein $\bar{x} \in \bar{X}$ mit $\tau(\bar{x}) = x$.

Beh.: Ist $\mathcal{G}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -Modul vom Rang 1, dessen globale Schnitte $\mathcal{G}_{\bar{X}}$ erzeugen, so ist $\lambda(\tau_*(\tau^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{G})) = \lambda(\tau_* \tau^* \mathcal{G})$.

Bew.: Es gibt ein $s \in H^0(\bar{X}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}(\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{G})$ so, daß

$s_{\bar{X}}: \mathcal{O}_{\bar{X}, \bar{X}} \rightarrow \mathcal{G}_{\bar{X}}$ surjektiv, also auch $(\mathcal{G}_{\bar{X}}$ frei) injektiv ist.

Durch $\tau^* \mathcal{G} \ni f \mapsto f \otimes s \in \tau^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ wird ein Morphismus definiert, den wir mit $\bar{s}$ bezeichnen. Sei $\mathcal{R}$ der Kern, $\mathcal{G}'$ der Kokern von $\bar{s}$.

Die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \tau^* \mathcal{G} \rightarrow \tau^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ induziert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tau_* \mathcal{R} \rightarrow \tau_* \tau^* \mathcal{G} \rightarrow \tau_*(\tau^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow 0.$$

x liegt nicht in $\text{supp } \tau_* \mathcal{R} \cup \text{supp } \mathcal{G}'$, weil τ über x biholomorph ist, und weil $\bar{s}_{\bar{X}}: (\tau^* \mathcal{G})_{\bar{X}} \rightarrow (\tau^* \mathcal{G})_{\bar{X}} \otimes \mathcal{G}_{\bar{X}}$ ein Isomorphismus ist.

Also ist $S \notin \text{supp } \tau_* \mathcal{R} \cup \text{supp } \mathcal{G}' \subset \text{supp } \tau_* \tau^* \mathcal{G} \subset \text{supp } \mathcal{G} = S$, mithin $d(\tau_* \mathcal{R}) < r$ und $d(\mathcal{G}') < r$.

Daher ist $\lambda(\tau_* \tau^* \mathcal{G}) = \lambda(\tau_*(\tau^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{G})) + \lambda(\tau_* \mathcal{R}) - \lambda(\mathcal{G}') = \lambda(\tau_*(\tau^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}))$, wegen der Voraussetzung über λ .

Anwendung der Behauptung auf $\mathcal{G} := \mathcal{G} \otimes \tau^* \mathcal{G}$ liefert:

$$\lambda(\tau_* \tau^* \mathcal{G}) = \lambda(\tau_*(\tau^* \mathcal{G} \otimes (\tau^* \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}))) = \lambda(\tau_*(\tau^*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}) \otimes \mathcal{G})).$$

Anwendung auf $\mathcal{G} := \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ (statt $\mathcal{G}$):

$$\lambda(\tau_* \tau^*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G})) = \lambda(\tau_*(\tau^*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}) \otimes \mathcal{G})).$$

Insgesamt: $\lambda(\tau_* \tau^* \mathfrak{F}) = \lambda(\tau_* \tau^* (\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}))$. (*)

Für den Kern $\mathfrak{K}_1$ und den Kokern $\mathfrak{C}_1$ der kanonischen Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \tau_* \tau^* \mathfrak{F}$ gilt: $d(\mathfrak{K}_1) < r$ und $d(\mathfrak{C}_1) < r$: Die Träger von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ liegen im Träger von $\mathfrak{F}$ und enthalten x nicht, weil τ über x biholomorph ist.

Also ist $\lambda(\mathfrak{K}_1) = \lambda(\mathfrak{C}_1) = 0$, und deshalb $\lambda(\mathfrak{F}) = \lambda(\tau_* \tau^* \mathfrak{F})$.

Analog: $\lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}) = \lambda(\tau_* \tau^* (\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}))$.

Zusammen mit (*) folgt: $\lambda(\mathfrak{F}) = \lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G})$.

2) S beliebig.

S sei mit der durch das Annulatorideal von $\mathfrak{F}$ induzierten komplexen Struktur versehen. $S_1, \dots, S_l$ seien die irreduziblen Komponenten von S bezüglich dieser Struktur (1.4).

Für $1 \leq \alpha \leq l$ sei $\mathfrak{F}_\alpha := \mathfrak{F} \otimes \mathcal{O}_{S_\alpha}$. A sei die Menge aller Punkte aus X , die in mindestens zwei irreduziblen Komponenten von S liegen. Dann ist $\dim A < r$.

Durch $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{S_\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq l$, $\mathcal{O}_{S_\alpha}$ aufgefaßt als $\mathcal{O}_X$ -Modul, wird ein Morphismus $t: \mathfrak{F} \rightarrow \oplus \mathfrak{F}_\alpha$ von $\mathcal{O}_X$ -Moduln induziert. t ist über $X - A$ ein Isomorphismus. Für den Kern $\mathfrak{K}_2$ und den Kokern $\mathfrak{C}_2$ von t gilt daher: $d(\mathfrak{K}_2) < r$ und $d(\mathfrak{C}_2) < r$.

Also ist $\lambda(\mathfrak{F}) = \lambda(\oplus \mathfrak{F}_\alpha) = \sum \lambda(\mathfrak{F}_\alpha)$, letzteres wegen der Additivität von λ .

Analog: $\lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}) = \lambda(\mathfrak{G} \otimes \oplus \mathfrak{F}_\alpha) = \lambda(\oplus (\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{F}_\alpha)) = \sum \lambda(\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{F}_\alpha)$.

Daraus und aus (1), angewandt auf die $\mathfrak{F}_\alpha$, folgt:

$\lambda(\mathfrak{F}) = \sum \lambda(\mathfrak{F}_\alpha) = \sum \lambda(\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{F}_\alpha) = \lambda(\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{F})$.

Im folgenden sei A_n der Ring der Polynome in n Veränderlichen mit ganzzahligen Koeffizienten und Exponenten: Ein Element $P \in A_n$ ist ein Ausdruck der Form

$$P = \sum a(v_1, \dots, v_n) \cdot X_1^{v_1} \cdot \dots \cdot X_n^{v_n}, \text{ wobei } v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}, \\ a(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}, a(v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ für fast alle } (v_1, \dots, v_n).$$

Seien $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ lokal freie $\mathcal{O}_X$ -Moduln vom Rang 1.

Für $P \in A_n$ definiert man:

$$\lambda(\mathfrak{F} \otimes P(\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n)) := \sum a(v_1, \dots, v_n) \cdot \lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{S}_1^{\otimes v_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{S}_n^{\otimes v_n}), \\ \mathfrak{F} \text{ ein kohärenter } \mathcal{O}_X\text{-Modul.}$$

Es gilt: a) $\lambda(\mathfrak{F} \otimes P(\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n)) + \lambda(\mathfrak{F} \otimes Q(\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n)) = \\ \lambda(\mathfrak{F} \otimes (P+Q)(\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n))$ für alle $P, Q \in A_n$.

b) Ist $Q = C \cdot X_1^{m_1} \cdot \dots \cdot X_n^{m_n}$, so ist

$$\lambda(\mathfrak{F} \otimes (P \cdot Q)(\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n)) = \lambda(\mathfrak{F} \otimes P(\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n) \otimes Q(\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n)).$$

$J_n \subset A_n$ sei das von den Polynomen $1 - X_1, \dots, 1 - X_n$ erzeugte Ideal. Wegen $1 - X_v^{-1} = -X_v^{-1}(1 - X_v)$, $v = 1, \dots, n$, wird J_n auch von den $1 - X_v^{-1}$, $v = 1, \dots, n$, erzeugt.

4.6 Hilfssatz: Ist $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul mit $d(\mathfrak{F}) \leq m$, so ist $\lambda(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{S}_1) \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{S}_{m+1-r(\lambda)})) = 0$. Für $P \in A_n$ hängt somit $\lambda(\mathfrak{F} \otimes P(\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n))$ nur von der Äquivalenzklasse von P modulo $J_n^{m+1-r(\lambda)}$ ab.

Beweis durch vollständige Induktion nach $\rho := m - r(\lambda)$.

$\rho = 0$: Wegen $d(\mathfrak{F}) = r(\lambda)$ ist nach 4.5 $\lambda(\mathfrak{F}) = \lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{S}_1)$.

$\rho \rightarrow \rho + 1$: Durch $\lambda'(\mathfrak{F}) := \lambda(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{S}_1) \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{S}_{\rho+1}))$ wird

nach (4.4 b,c) eine additive Garbenfunktion definiert.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\lambda'(\mathfrak{F}) = 0$ für alle $\mathfrak{F}$ mit $d(\mathfrak{F}) \leq m$, also $r(\lambda') \geq m+1$. Aus 4.5, angewandt auf λ' , folgt:
 $\lambda'(\mathfrak{F}) = \lambda'(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}_{\rho+2})$ für alle $\mathfrak{F}$ mit $d(\mathfrak{F}) \leq m+1$.

Also ist $\lambda(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{F}_1) \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{F}_{\rho+2})) = \lambda'(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{F}_{\rho+2})) = 0$.

Für $m \in \mathbb{Z}$ und $\mu \in \mathbb{N}$ sei $\binom{m}{\mu} := \frac{m(m-1) \dots (m-\mu+1)}{\mu!}$.

4.7 Hilfssatz: Für alle $1 \leq v \leq n$, $s \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$X_v^m \equiv \sum_{j=0}^s \binom{m+j-1}{j} \cdot (1 - X_v^{-1})^j \bmod A_n \cdot (1 - X_v^{-1})^{s+1}.$$

Beweis: Ist $m \geq 0$, so gilt: $\sum_{j=0}^s \binom{m+j-1}{j} \cdot (1 - X_v^{-1})^j \equiv$

$$\left(\sum_{j=0}^s (1 - X_v^{-1})^j \right)^m \bmod A_n \cdot (1 - X_v^{-1})^{s+1}, \text{ und}$$

$$\left(\sum_{j=0}^s (1 - X_v^{-1})^j \right)^m = (X_v (1 - (1 - X_v^{-1})^{s+1}))^m = X_v^m +$$

$$\sum_{\mu=1}^m (-1)^\mu \cdot (1 - X_v^{-1})^{(s+1)\mu} \cdot \binom{m}{\mu} \cdot X_v^m \equiv X_v^m \bmod A_n \cdot (1 - X_v^{-1})^{s+1}.$$

$$\text{Ferner ist } X_v^{-m} = (1 - (1 - X_v^{-1}))^m = \sum_{\mu=0}^m (-1)^\mu \cdot \binom{m}{\mu} \cdot (1 - X_v^{-1})^\mu \equiv$$

$$\sum_{\mu=0}^s (-1)^\mu \cdot \binom{m}{\mu} \cdot (1 - X_v^{-1})^\mu \bmod A_n \cdot (1 - X_v^{-1})^{s+1}.$$

Wegen $(-1)^\mu \cdot \binom{m}{\mu} = \binom{-m+\mu-1}{\mu}$ für $0 \leq \mu \leq s$ folgt:

$$X_v^{-m} \equiv \sum_{\mu=0}^s \binom{-m+\mu-1}{\mu} \cdot (1 - X_v^{-1})^\mu \bmod A_n \cdot (1 - X_v^{-1})^{s+1}.$$

Die Behauptung ist daher für alle $m \in \mathbb{Z}$ richtig.

Durch iterierte Anwendung von 4.7 zeigt man:

4.8 Korollar: Für $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ ist

$$X_1^{m_1} \cdot \dots \cdot X_n^{m_n} \equiv \sum_{0 \leq j_1, \dots, j_n \leq s} \left(\prod_{v=1}^s \binom{m+j_v-1}{j_v} \cdot (1 - X_v^{-1})^{j_v} \right) \mod J_n^{s+1}.$$

Sei jetzt $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul, $s := d(\mathfrak{F})$.

Für natürliche Zahlen $m_1, \dots, m_n$ sei $p(\mathfrak{F}_1^{[m_1]}, \dots, \mathfrak{F}_n^{[m_n]}; \mathfrak{F})$

$:= \lambda(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{F}_1^{\otimes (-1)})^{m_1} \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{F}_n^{\otimes (-1)})^{m_n})$. Nach 4.6 ist

$p(\mathfrak{F}_1^{[m_1]}, \dots, \mathfrak{F}_n^{[m_n]}; \mathfrak{F}) = 0$, falls $m_1 + \dots + m_n \geq s - r(\lambda)$.

Daraus und aus 4.8 folgt: $\lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_n^{\otimes m_n}) =$

$$\sum_{0 \leq j_1, \dots, j_n \leq s} \left(\prod_{v=1}^s \binom{m+j_v-1}{j_v} \right) \cdot \lambda(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{F}_1^{\otimes (-1)})^{j_1} \dots (1 - \mathfrak{F}_n^{\otimes (-1)})^{j_n})$$

$$= \sum_{j_1 + \dots + j_n \leq s - r(\lambda)} p(\mathfrak{F}_1^{[j_1]}, \dots, \mathfrak{F}_n^{[j_n]}; \mathfrak{F}) \cdot \binom{m_1+j_1-1}{j_1} \dots \binom{m_n+j_n-1}{j_n}.$$

Damit ist gezeigt:

4.9 Satz: $\lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_n^{\otimes m_n})$ ist ein Polynom in $m_1, \dots, m_n$ vom Höchstgrad $s - r(\lambda)$.

4.10 Bemerkung: Ist $n \geq s - r(\lambda)$, so hängt der Koeffizient

von $m_1 \dots m_{s-r(\lambda)}$ in $\lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{G}_n^{\otimes m_n})$ nur von
und $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_{s-r(\lambda)}$ ab.

$p(\mathfrak{G}_1^{[1]}, \dots, \mathfrak{G}_{s-r(\lambda)}^{[1]}; \mathfrak{F})$ ist der Koeffizient von $m_1 \dots m_{s-r(\lambda)}$
in $\lambda(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{G}_n^{\otimes m_n})$.

Sei von jetzt an $\lambda = \chi$, die Euler-Charakteristik, also
insbesondere $r(\lambda) = 0$.

4.11 Definition: Sei $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul, $s := d(\mathfrak{F})$.

Der Koeffizient von $m_1 \dots m_s$ in $\chi(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{G}_s^{\otimes m_s})$
heißt Schnittzahl der (lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Moduln vom Rang 1)
 $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_s$ mit $\mathfrak{F}$, und wird mit $(\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s \cdot \mathfrak{F})$ bezeichnet.

Für $\mathfrak{G}_1 = \dots = \mathfrak{G}_s =: \mathfrak{G}$ setzt man $(\mathfrak{G}^s \cdot \mathfrak{F}) := (\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s \cdot \mathfrak{F})$.

Ist $\mathfrak{F} = \mathcal{O}_X/\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ das Ideal eines Unterraums Z von X , so
nennt man $(\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s \cdot Z) := (\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s \cdot \mathfrak{F})$ die Schnittzahl
der $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_s$ mit Z .

Für $Z = X$ setzt man dann $(\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s) := (\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s \cdot X)$.

Ist $s = \dim X$ und $\mathfrak{G}_1 = \dots = \mathfrak{G}_s =: \mathfrak{G}$, so heißt $(\mathfrak{G}^s) :=$
 $(\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s)$ die Selbstschnittzahl von $\mathfrak{G}$.

Ist $\mathfrak{G} = \mathcal{O}_X(D_\sigma)$, $\sigma = 1, \dots, s$, D_σ Divisor auf X , so bezeichnet
man $(\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s \cdot \mathfrak{F})$ mit $(D_1 \dots D_s \cdot \mathfrak{F})$.

$(D^{\cdot s} \cdot \mathfrak{F})$, $(D_1 \cdot \dots \cdot D_s \cdot Z)$, $(D^{\cdot s} \cdot Z)$ werden entsprechend definiert.

Ist $s = \dim X$, so heißt $(D^{\cdot s})$ Selbstschnittzahl des Divisors D .

4.12 Bemerkung: $\chi(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes m})$ ist ein Polynom in m vom Höchstgrad $s = d(\mathfrak{F})$. Der Koeffizient von m^s ist $\frac{1}{s!} \cdot (\mathfrak{F}^{\cdot s} \cdot \mathfrak{F})$.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \chi(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes m}) &= \sum_{j=0}^s p(\mathfrak{F}^{[j]}; \mathfrak{F}) \cdot \binom{m+j-1}{j} = \\ &= p(\mathfrak{F}^{[s]}; \mathfrak{F}) \cdot \binom{m+s-1}{s} + \sum_{j=0}^{s-1} p(\mathfrak{F}^{[j]}; \mathfrak{F}) \cdot \binom{m+j-1}{j} \end{aligned}$$

Der zweite Summand des letzten Ausdrucks ist ein Polynom in m vom Höchstgrad $s-1$. Also ist der Koeffizient von m^s gleich $\frac{1}{s!} \cdot p(\mathfrak{F}^{[s]}; \mathfrak{F})$.

Nun ist $p(\mathfrak{F}^{[s]}; \mathfrak{F}) = \chi(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{F}^{\otimes (-1)})^s) = p(\mathfrak{F}^{[1]}, \dots, \mathfrak{F}^{[1]}; \mathfrak{F})$, also folgt nach 4.10 die Behauptung.

4.13 Beispiel: $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)^{\cdot n}) = 1$;

Die meromorphen Funktionen $1, \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}$ lassen sich als

Basis von $H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))$ auffassen. Entsprechend bilden

die homogenen Polynome in $\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}$ vom Grad $\leq m$ eine

Basis von $H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(m))$.

Die Dimension des Vektorraums der homogenen Polynome in n Veränderlichen vom Grad μ ist $\binom{n+\mu-1}{\mu}$, die des Raums der

homogenen Polynome vom Grad $\leq m$ somit

$$\sum_{\mu=0}^m \binom{m+\mu-1}{\mu} = \binom{n+m}{m} = \frac{(m+1) \cdot \dots \cdot (m+n)}{n!} = \frac{m^n}{n!} + \text{Terme vom Grad} \\ < n \text{ in } m.$$

$h^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(m))$ ist also ein Polynom in m vom Grad n mit
Höchstkoeffizient $\frac{1}{n!}$.

Für hinreichend große m ist $h^q(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(m)) = 0$ für alle $q \geq 1$,
und damit $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(m)) = h^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(m))$.

Daher ist $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(m))$ ein Polynom in m vom Grad n mit
Höchstkoeffizient $\frac{1}{n!}$. Nach 4.12 folgt die Behauptung.

Für die durch $z_0 = 0$ definierte Hyperebene D im $\mathbb{P}_n$ ist also
($D \cdot n$) gleich der klassischen Selbstschnittzahl (wie sie
e.g. in Šafarevič [25] definiert wird).

Wir beweisen nun einige für die folgenden Paragraphen
wichtige Eigenschaften der Schnittzahlen. Es wird sich
dann herausstellen, daß für projektiv-algebraische Räume
allgemein gilt: Die Schnittzahlen gemäß 4.11 von Divisoren
mit Unterräumen stimmen mit den entsprechenden klassischen
Schnittzahlen überein.

Die meisten der folgenden Beweise sind mehr oder weniger
wortwörtlich aus Kleiman [15] übernommen.

4.14 Lemma: $(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}) = 0$ falls $d(\mathfrak{F}) < s$; $(\mathfrak{F}) = h^0(X, \mathfrak{F})$,
falls $d(\mathfrak{F}) = 0$.

Beweis: $\chi(\mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F})$ ist ein Polynom vom Grad

$\leq d(\mathfrak{F}) < s$, d.h. der Koeffizient von $m_1 \dots m_s$ ist 0.

Ist $d(\mathfrak{F}) = 0$, so ist $(\mathfrak{F}) = \chi(\mathfrak{F}) = h^0(X, \mathfrak{F})$.

4.15 Lemma: $(\mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F})$ ist symmetrisch in den $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_s$

und $\mathbb{Z}$ -linear bezüglich jedes $\mathfrak{F}_\sigma$.

Beweis: Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie des Tensorprodukts.

Zu zeigen bleibt: Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und alle lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Moduln $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ vom Rang 1 ist

$$((\mathfrak{F}^{\otimes m} \otimes \mathfrak{G}^{\otimes n}) \cdot \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_s) = m \cdot (\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_s) + n \cdot (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_s).$$

$$(i) \quad \chi((\mathfrak{F}^{\otimes(-1)})^m \otimes \mathfrak{F}_2^{\otimes m_2} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F}) =$$

$$\chi(\mathfrak{F}^{\otimes(-m)} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F}) = (\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}) \cdot (-m)m_2 \dots m_s \\ + \text{Terme} \neq (-m)m_2 \dots m_s.$$

Nach Definition der Schnittzahl folgt:

$$(\mathfrak{F}^{\otimes(-1)} \cdot \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}) = -(\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}).$$

$$(ii) \text{ Nach 4.10 ist } ((\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}) \cdot \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}) =$$

$$\chi(\mathfrak{F} \otimes (1 - (\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G})^{\otimes(-1)}) \otimes (1 - \mathfrak{F}_2^{\otimes(-1)}) \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{F}_s^{\otimes(-1)})) =$$

$$\chi(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{F}^{\otimes(-1)} + \mathfrak{F}^{\otimes(-1)} \otimes (1 - \mathfrak{G}^{\otimes(-1)})) \otimes (1 - \mathfrak{F}_2^{\otimes(-1)}) \otimes \dots =$$

$$\chi(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{F}^{\otimes(-1)}) \otimes (1 - \mathfrak{F}_2^{\otimes(-1)}) \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{F}_s^{\otimes(-1)})) +$$

$$\chi(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes(-1)} \otimes (1 - \mathfrak{G}^{\otimes(-1)}) \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{F}_s^{\otimes(-1)})) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \chi(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{L}_1^{\otimes(-1)}) \otimes (1 - \mathfrak{L}_2^{\otimes(-1)}) \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{L}_s^{\otimes(-1)})) + \\
 &\quad \chi(\mathfrak{F} \otimes (1 - \mathfrak{L}_1^{\otimes(-1)}) \otimes (1 - \mathfrak{L}_2^{\otimes(-1)}) \otimes \dots \otimes (1 - \mathfrak{L}_s^{\otimes(-1)})) \\
 &\quad \quad \quad (\text{nach 4.6, da } d(\mathfrak{F}) = s) \\
 &= (\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot \mathfrak{F}) + (\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot \mathfrak{F})
 \end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) folgt die Behauptung.

4.16 Lemma: Ist $0 \rightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$ exakt, so ist

$$(\mathfrak{L}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot \mathfrak{F}) = (\mathfrak{L}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot \mathfrak{F}') + (\mathfrak{L}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot \mathfrak{F}'').$$

Beweis: Wegen $d(\mathfrak{F}) = s$ ist $d(\mathfrak{F}') \leq s$ und $d(\mathfrak{F}'') \leq s$.

Die Behauptung folgt jetzt aus 4.10 und der Additivität von χ .

4.17 Lemma: Sei $\mathfrak{L}_1 = \mathcal{O}_X(D)$ für einen effektiven Divisor D auf X . Die lokalen Gleichungen von D seien Nichtnullteiler bezüglich $\mathfrak{F}$, d.h. der durch

$$0 \rightarrow \mathfrak{L}_1^{\otimes(-1)} \rightarrow \mathcal{O}_X \text{ induzierte Morphismus } \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{L}_1^{\otimes(-1)} \rightarrow \mathfrak{F}$$

sei injektiv.

Dann ist $(\mathfrak{L}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot \mathfrak{F}) = (\mathfrak{L}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot \mathfrak{F}_D)$, wobei $\mathfrak{F}_D = \mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D$ als $\mathcal{O}_X$ -Modul aufgefaßt wird.

Insbesondere: Ist $Z \rightarrow X$ gegeben durch ein Ideal $\mathfrak{z}$, und gilt für das Ideal $\mathcal{D} \cong \mathfrak{L}_1^{\otimes(-1)}$ der Hyperfläche D $\mathfrak{z} \cdot \mathcal{D} = \mathfrak{z}$, so ist $(\mathfrak{L}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot Z) = (\mathfrak{L}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_s \cdot (D \cap Z))$, wenn $\dim Z \leq s$.

Beweis: Die durch $0 \rightarrow \mathfrak{L}_1^{\otimes(-1)} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$

induzierte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathfrak{F}_1^{\otimes(m_1-1)} \otimes \mathfrak{F}_2^{m_2} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{m_s} \otimes \mathfrak{F} &\rightarrow \mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{m_s} \otimes \mathfrak{F} \\ &\rightarrow \mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{m_s} \otimes \mathfrak{F}_D \rightarrow 0, \quad m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ist wegen der Voraussetzung über D exakt.

$\chi(\mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F})$ ist von der Form

$$m_2 \cdot \dots \cdot m_s \cdot (c_0 + c_1 m_1 + \dots + c_s m_s) + Q(m_1, \dots, m_s), \quad Q \text{ ein Polynom,}$$

in dem der Term $m_2 \cdot \dots \cdot m_s$ nicht auftritt.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \chi(\mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F}_D) &= \chi(\mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F}) - \\ &- \chi(\mathfrak{F}_1^{\otimes(m_1-1)} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F}) = m_2 \cdot \dots \cdot m_s \cdot (c_0 + c_1 m_1 + \dots) \\ &+ Q(m_1, \dots, m_s) - m_2 \cdot \dots \cdot m_s \cdot (c_0 + c_1(m_1-1) + \dots + c_s m_s) - \\ &- Q(m_1-1, \dots, m_s) = c_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_s + \bar{Q}(m_1, \dots, m_s), \end{aligned}$$

$\bar{Q}$ ein Polynom, in dem der Term $m_2 \cdot \dots \cdot m_s$ nicht auftritt.

$$\text{Also ist } (\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}) = c_1 = (\mathfrak{F}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}_D).$$

Der Ausdruck $(\mathfrak{F}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}_D)$ ist wohldefiniert, denn wegen der Voraussetzung über D ist $d(\mathfrak{F}_D) = \dim(D \cap \text{supp } \mathfrak{F}) \leq s-1$.

Bemerkung: Sind $D_1, \dots, D_s$ Divisoren auf X, ist $\dim X = s$, und ist D_1 effektiv, so ist nach obigem Lemma die Schnittzahl der s Divisoren $D_1, \dots, D_s$ gleich der Schnittzahl der $s-1$ Divisoren $D_2, \dots, D_s$ mit dem durch D_1 definierten $(s-1)$ -dimensionalen Unterraum von X. Die in §1 getroffene Vereinbarung, effektive Divisoren und die durch sie definierten

Hyperflächen mit dem gleichen Symbol zu bezeichnen, führt also hier nicht zu Mißverständnissen.

Der Träger S von $\mathfrak{F}$ sei mit der durch das Annulatorideal induzierten komplexen Struktur versehen. Ist $Z \hookrightarrow X$, und enthält Z S als Unterraum, so läßt sich $\mathfrak{F}$ als kohärenter $\mathcal{O}_Z$ -Modul auffassen. $(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F})_Z$ bezeichne die Schnittzahl der $\mathcal{O}_Z$ -Moduln $\mathfrak{F}_{1,Z}, \dots, \mathfrak{F}_{s,Z}$ mit dem $\mathcal{O}_Z$ -Modul $\mathfrak{F}$.

4.18 Lemma: Mit obigen Bezeichnungen gilt:

$$(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}) = (\mathfrak{F}_{1,Z} \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_{s,Z} \cdot \mathfrak{F})_Z.$$

Speziell gilt, wenn $\dim Z = s$:

$$(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot Z) = (\mathfrak{F}_{1,Z} \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_{s,Z})_Z.$$

Beweis: Für $\sigma = 1, \dots, s$ ist $\mathfrak{F}_{\sigma,Z} \otimes \mathfrak{F}$, aufgefaßt als $\mathcal{O}_X$ -Modul, isomorph zu $\mathfrak{F}_{\sigma} \otimes \mathfrak{F}$. Also ist

$$\chi(\mathfrak{F}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_s^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F}) = \chi(\mathfrak{F}_{1,Z}^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_{s,Z}^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F}), \text{ unabhängig}$$

davon, ob $\mathfrak{F}_{1,Z}^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_{s,Z}^{\otimes m_s} \otimes \mathfrak{F}$ als $\mathcal{O}_X$ - oder $\mathcal{O}_Z$ -Modul aufgefaßt wird.

Im folgenden wird daher in der Situation von 4.18 nicht mehr zwischen $(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F})$ und $(\mathfrak{F}_{1,Z} \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_{s,Z} \cdot \mathfrak{F})_Z$ unterschieden.

4.19 Korollar: Ist D ein effektiver Divisor auf X , und ist $n := \dim X$, so gilt: $(D \cdot^n) = (\mathcal{O}_D(D) \cdot (n-1))_D$.

Beweis: $(D \cdot n) = (\mathcal{O}_X(D) \cdot n) = (\mathcal{O}_X(D) \cdot (n-1) \cdot \mathcal{O}_D) = (\mathcal{O}_D(D) \cdot (n-1))_D$.

4.20 Korollar: Seien $S_1, \dots, S_k$ die irreduziblen Komponenten von $S = \text{supp } \mathfrak{F}$ (versehen mit der durch das Annulatorideal von $\mathfrak{F}$ bestimmten komplexen Struktur). Für $\kappa = 1, \dots, k$ sei

$$\mathfrak{F}_\kappa := \mathfrak{F}_{S_\kappa}.$$

Dann ist $(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}) = \sum_{\kappa} (\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}_\kappa)$.

Beweis: Nach 4.16 ist

$$(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \oplus \mathfrak{F}_\kappa) = \sum (\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}_\kappa).$$

Sei $\mathfrak{A}$ der Kern, $\mathfrak{C}$ der Kokern von $\mathfrak{F} \rightarrow \oplus \mathfrak{F}_\kappa$ (vgl. Beweis von 4.5). Wegen $d(\mathfrak{A}) < d(\mathfrak{F})$ und $d(\mathfrak{C}) < d(\mathfrak{F})$ folgt nach 4.14:

$$(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{F}) = (\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot \oplus \mathfrak{F}_\kappa).$$

4.21 Korollar: Sei Z ein abgeschlossener Unterraum der Dimension s von X . Sei d ein Divisor auf Z mit $\mathfrak{F}_{1,Z} = \mathcal{O}_Z(d)$. Dann ist $(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot Z) = (\mathfrak{F}_{2,Z} \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_{s,Z} \cdot \mathcal{O}_d)$.

Beweis: $(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_s \cdot Z) = (\mathfrak{F}_{1,Z} \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_{s,Z}) = (\mathfrak{F}_{2,Z} \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_{s,Z} \cdot \mathcal{O}_d)$ nach 4.18 bzw. 4.17.

4.22 Lemma: Sei $\pi: Y \rightarrow X$ eine Pseudomodifikation, Y ein analytisches Schema. Sei $n := \dim X$.

Dann ist $(\mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{F}_n) = (\pi^* \mathfrak{F}_1 \cdot \dots \cdot \pi^* \mathfrak{F}_n)$

Beweis: Für einen kohärenten $\mathcal{O}_Y$ -Modul $\mathcal{G}$ sei

$$\lambda(\mathcal{G}) := \sum_{q \geq 0} (-1)^q \chi(R^q \pi_* \mathcal{G}), \quad R^q \pi_* \mathcal{G} \text{ die } q\text{-te Bildgarbe.}$$

λ ist wohldefiniert, denn die $R^q \pi_* \mathcal{G}$ sind kohärente $\mathcal{O}_X$ -Moduln, und es ist $R^q \pi_* \mathcal{G} = 0$ für fast alle q , weil π eigentlich ist.

λ ist eine additive Garbenfunktion auf Y : Ist

$0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von kohärenten $\mathcal{O}_Y$ -Moduln, so ist die Bildgarbensequenz

$$0 \rightarrow \pi_* \mathcal{G}' \rightarrow \pi_* \mathcal{G} \rightarrow \pi_* \mathcal{G}'' \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{G}' \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{G} \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{G}'' \rightarrow \dots$$

exakt, und daher $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G}') + \lambda(\mathcal{G}'')$.

χ_Y bezeichne die Euler-Charakteristik auf Y . Dann ist

$\mu := \lambda - \chi_Y$ eine additive Garbenfunktion auf Y .

Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_Y$ -Modul $\mathcal{G}$ mit $d(\mathcal{G}) = 0$ ist

$$\lambda(\mathcal{G}) = h^0(X, \pi_* \mathcal{G}) = h^0(Y, \mathcal{G}) = \chi_Y(\mathcal{G}), \text{ also } \mu(\mathcal{G}) = 0, \text{ d.h. } r(\mathcal{G}) \geq 1.$$

Nach 4.9 folgt: Sind $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ lokal freie $\mathcal{O}_Y$ -Moduln vom Rang 1, und ist $\mathcal{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$ -Modul mit $d(\mathcal{G}) = s$,

so ist $\mu(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\otimes m_1} \mathcal{G}_1 \otimes \dots \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\otimes m_n} \mathcal{G}_n)$ ein Polynom in $m_1, \dots, m_n$ vom Höchstgrad $s - 1$.

Mit $\mathcal{G}(m_1, \dots, m_n) := \mathcal{G}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\otimes m_n} \mathcal{G}_n$ gilt deshalb:

$\mu(\mathcal{G}(m_1, \dots, m_n))$ ist ein Polynom vom Höchstgrad $n - 1$.

Die Koeffizienten von $m_1 \dots m_n$ der Polynome $\lambda(\mathcal{G}(m_1, \dots, m_n))$ und $\chi_Y(\mathcal{G}(m_1, \dots, m_n))$ stimmen daher überein. $(*)$

Sei jetzt $\mathbb{G}_v := \pi^* \mathbb{G}_v, v = 1, \dots, n$. Für jeden lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathbb{G}$ und alle $q \in \mathbb{N}$ ist $R^q \pi_* (\pi^* \mathbb{G}) \cong R^q \pi_* \mathcal{O}_Y \otimes \mathbb{G}$; also ist $\chi(R^q \pi_* \mathbb{G}(m_1, \dots, m_n)) = \chi(R^q \pi_* \mathcal{O}_Y \otimes \mathbb{G}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{G}_n^{\otimes m_n})$ für alle $q \in \mathbb{N}$ ein Polynom in $m_1, \dots, m_n$ vom Höchstgrad $d(R^q \pi_* \mathcal{O}_Y)$.

Für $q \geq 1$ liegen die Träger von $R^q \pi_* \mathcal{O}_Y$ im Zentrum von π . haben also Dimension $< n$. Nach 4.14 folgt: Die Koeffizienten von $m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ der Polynome $\lambda(\mathbb{G}(m_1, \dots, m_n))$ und $\chi(\pi_* \mathbb{G}(m_1, \dots, m_n))$ stimmen überein. (**)

Der Morphismus $\mathcal{O}_X \rightarrow \pi_* \pi^* \mathcal{O}_X = \pi_* \mathcal{O}_Y$ induziert einen Morphismus $\mathbb{G}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{G}_n^{\otimes m_n} \rightarrow \mathbb{G}(m_1, \dots, m_n)$, dessen Kern und Kokern Träger der Dimension $< n$ haben. Aus 4.14 und der Additivität der Schnittzahlen (4.16) folgt: Die Koeffizienten von $m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ der Polynome $\chi(\pi_* \mathbb{G}(m_1, \dots, m_n))$ und $\chi(\mathbb{G}_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{G}_n^{\otimes m_n})$ stimmen überein, d.h.: $(\mathbb{G}_1 \cdot \dots \cdot \mathbb{G}_n)$ ist der Koeffizient von $m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ des Polynoms $\chi(\pi_* \mathbb{G}(m_1, \dots, m_n))$.

Damit ist wegen (*) und (**) das Lemma bewiesen.

4.23 Satz: Die Abbildung, die s lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Moduln $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_s$ vom Rang 1 und einem s -dimensionalen Unterraum Z von X die Schnittzahl $(\mathcal{G}_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_s \cdot Z)$ zuordnet, ist durch die in 4.14 - 4.22 formulierten Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_s, Z) \mapsto \langle \mathcal{G}_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_s \cdot Z \rangle$ eine weitere solche Zuordnung.

Vollständige Induktion nach s : Für $s = 0$ gilt nach 4.14:

$$(Z) = \langle Z \rangle.$$

Sei $s > 0$. Wegen 4.18 kann ohne Einschränkung $Z = X$ angenommen werden. Ohne Einschränkung sei ferner X projektiv (wegen 4.22 und nach Definition des analytischen Schemas).

Dann gibt es Divisoren $D_1, \dots, D_s$ auf X so, daß $\mathcal{G}_\sigma = \mathcal{O}_X(D_\sigma)$, $\sigma = 1, \dots, s$ (siehe etwa Griffiths [9], p.82).

Sei H ein sehr ample Divisor auf X , und seien $m, n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $D_1 + nH$ ample, und $T := m(D_1 + nH)$ sehr ample ist.

T und $H' := mnH$ sind insbesondere effektive Divisoren, also Hyperflächen.

Nach 4.15 ist $(mD_1 \cdot \dots \cdot D_s) = (T \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_s) - (H' \cdot \dots \cdot D_s) = (D_2 \cdot \dots \cdot D_s \cdot \mathcal{O}_T) - (D_2 \cdot \dots \cdot D_s \cdot \mathcal{O}_{H'})$, letzteres wegen 4.17. Entsprechendes gilt für $\langle \dots \rangle$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $(D_2 \cdot \dots \cdot D_s \cdot \mathcal{O}_T) = \langle D_2 \cdot \dots \cdot D_s \cdot \mathcal{O}_T \rangle$ und $(D_2 \cdot \dots \cdot D_s \cdot \mathcal{O}_{H'}) = \langle D_2 \cdot \dots \cdot D_s \cdot \mathcal{O}_{H'} \rangle$.

Also: $(D_1 \cdot \dots \cdot D_s) = \frac{1}{m} (\langle T \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_s \rangle - \langle H' \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_s \rangle) = \langle D_1 \cdot \dots \cdot D_s \rangle$.

4.24 Korollar: Ist X projektiv, so ist die Schnittzahl $(D_1 \cdot \dots \cdot D_s \cdot Z)$ gemäß 4.11 gleich der klassischen Schnittzahl der Divisoren $D_1, \dots, D_s$ mit dem s -dimensionalen Unterraum Z von X .

Beweis: Die klassische Schnittzahl hat die in 4.14 - 4.22 formulierten Eigenschaften.

Nachtrag: Einer Mitteilung von C. Bănica zufolge gilt Satz 4.9 für beliebige Mořsezon-Räume. Möglicherweise läßt sich damit dann auch Schnittzahltheorie für beliebige Mořsezon-Räume entwickeln.

§ 5 Numerische Projektivitätskriterien

In diesem Abschnitt werden ample Geradenbündel und Divisoren unter Verwendung der Schnittzahltheorie aus §4 charakterisiert.

Sei X ein analytisches Schema, und sei $\mathcal{Q}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1.

5.1 Hilfssatz: Ist X reduziert, so läßt sich $\mathcal{Q}$ als Untermodul der Garbe $\mathcal{M}_X$ der meromorphen Funktionskeime auffassen.

Beweis: Sei $\tau: \bar{X} \rightarrow X$ eine Pseudomodifikation mit projektivem $\bar{X}$ (vgl. 4.1). Das Zentrum $Z(\tau)$ von τ ist analytisch dünn in X , weil X reduziert ist (1.2), also (4.2) ist τ eine eigentliche Modifikation. Nach [9] gibt es einen Divisor D auf $\bar{X}$ mit $\mathcal{O}_{\bar{X}}(D) \cong \tau^* \mathcal{Q}$, d.h. $\tau^* \mathcal{Q}$ kann als Untermodul von $\mathcal{M}_{\bar{X}}$ aufgefaßt werden. Damit wird $\tau_* \tau^* \mathcal{Q}$ Untermodul von $\mathcal{M}_X$. Die kanonische Abbildung $\mathcal{Q} \rightarrow \tau_* \tau^* \mathcal{Q} \cong \tau_* \mathcal{O}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{Q}$ ist injektiv, weil τ eigentliche Modifikation ist, und weil $\mathcal{Q}$ lokal frei ist.

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Grundlegend für die numerische Untersuchung von Divisoren ist folgender

5.2 Satz (Nakai-Kriterium): Sei X ein analytisches Schema, und sei $\mathfrak{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathfrak{F}$ ist ampel.

(ii) Für jedes $s \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq \dim X$, und jeden s -dimensionalen Unterraum Z von X ist $(\mathfrak{F}^{\cdot s} \cdot Z) > 0$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\mathfrak{F}$ ampel. Vollständige Induktion nach $s = \dim Z$: Ist $s = 0$, so ist $(\mathfrak{F}^{\cdot 0} \cdot Z) = (Z) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z) > 0$.

$s \rightarrow s+1$: Nach 4.18 ist zu zeigen: $(\mathfrak{F}_Z^{\cdot (s+1)}) > 0$; also sei ohne Einschränkung $Z = X$. Weiter kann angenommen werden, daß $\mathfrak{F}$ global erzeugt ist, und daß $H^q(X, \mathfrak{F}^{\otimes m}) = 0$ für alle $m, q \geq 1$ (man ersetze ggfs. $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F}^{\otimes n}$, n hinreichend groß, denn dann ist nach 4.15 $((\mathfrak{F}^{\otimes n})^{\cdot (s+1)}) = n^{s+1} \cdot (\mathfrak{F}^{\cdot (s+1)})$).

Es gibt daher einen effektiven ampel Divisor D auf X mit $\mathfrak{F} \cong \mathcal{O}_X(D)$. Sei $\mathcal{S}$ das Ideal der Hyperfläche D . Wegen $\mathfrak{F}^{\otimes (-1)} \cong \mathcal{S}$ induziert die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{S} \rightarrow 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{F}^{\otimes (m-1)} \rightarrow \mathfrak{F}^{\otimes m} \rightarrow \mathfrak{F}_D^{\otimes m} \rightarrow 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\chi(\mathfrak{F}_D^{\otimes m})$ ein Polynom in m vom Grad s mit positivem Höchstkoeffizienten.

$\chi(\mathfrak{F}^{\otimes m})$ ist ein Polynom vom Grad $\sigma \leq s+1$, also

$$\chi(\mathfrak{F}^{\otimes m}) = c_\sigma \cdot m^\sigma + R(m), \quad R \text{ ein Polynom vom Grad } < \sigma.$$

$$\text{Daher ist } \chi(\mathfrak{F}_D^{\otimes m}) = \chi(\mathfrak{F}^{\otimes m}) - \chi(\mathfrak{F}^{\otimes (m-1)}) = c_\sigma \cdot m^\sigma - c_\sigma \cdot (m-1)^\sigma +$$

$$R(m) - R(m-1) = c_\sigma \cdot \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} (-1)^{\alpha+1} \cdot m^\alpha + R(m) - R(m-1) \quad \text{ein Polynom}$$

vom Grad $\leq \sigma - 1$, d.h. es ist $s \leq \sigma - 1 \leq s + 1 - 1$, also $\sigma = s + 1$.

Somit ist nach 4.12 $(\mathfrak{F}^{(s+1)}) = (s+1)! \cdot c_{s+1} \neq 0$.

Wegen $h^q(X, \mathfrak{F}^{\otimes m}) = 0$ für $m, q \geq 1$ ist $\chi(\mathfrak{F}^{\otimes m}) = h^0(X, \mathfrak{F}^{\otimes m}) \geq 0$ für alle $m \geq 1$.

Wäre $(\mathfrak{F}^{(s+1)})$ und damit auch $c_{s+1} < 0$, so wäre $\chi(\mathfrak{F}^{\otimes m}) < 0$ für alle hinreichend großen m .

Also ist $(\mathfrak{F}^{(s+1)}) > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $(\mathfrak{F}^{(s)} \cdot Z) > 0$ für alle s -dimensionalen Unterräume Z von X .

Vollständige Induktion nach $t = \dim X$:

Ist $t = 0$, so ist $\mathfrak{F}$ trivialerweise ampel.

$t \rightarrow t+1$: Nach 3.10 und 3.11 kann X reduziert und irreduzibel angenommen werden; deshalb und wegen 5.1 sei o.E. $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}_X$.

$\mathfrak{Y} := \mathfrak{F} \cap \mathcal{O}_X$ und $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Y} \otimes \mathfrak{F}$ sind Ideale in $\mathcal{O}_X$. Die Dimension der durch sie definierten Unterräume Y bzw. Z von X ist kleiner als $t+1$.

Aus den exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes m} \rightarrow \mathfrak{F}^{\otimes m} \rightarrow \mathfrak{F}_Y^{\otimes m} \rightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes(m-1)} \rightarrow \mathfrak{F}^{\otimes(m-1)} \rightarrow \mathfrak{F}_Z^{\otimes(m-1)} \rightarrow 0$$

ergibt sich für alle $q \geq 2$ und alle $m \gg 0$:

$$H^q(X, \mathfrak{F}^{\otimes(m-1)}) \cong H^q(X, \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes(m-1)}) = H^q(X, \mathfrak{Y} \otimes \mathfrak{F}^{\otimes m}) \cong H^q(X, \mathfrak{F}^{\otimes m}),$$

denn nach Induktionsvoraussetzung ist

$$H^q(X, \mathcal{F}_Y^{\otimes m}) = H^q(Y, \mathcal{F}_Y^{\otimes m}) = 0 = H^q(Z, \mathcal{F}_Z^{\otimes(m-1)}) = H^q(X, \mathcal{F}_Z^{\otimes(m-1)})$$

für alle $q \geq 1$ und alle $m \gg 0$.

Es gibt somit ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $h^q(X, \mathcal{F}^{\otimes m}) = h^q(X, \mathcal{F}^{\otimes m_0})$ für alle $q \geq 2$ und alle $m \geq m_0$.

Für $m \geq m_0$ ist daher $\chi(\mathcal{F}^{\otimes m}) = h^0(X, \mathcal{F}^{\otimes m}) - h^1(X, \mathcal{F}^{\otimes m}) + c$,
c eine ganzzahlige Konstante.

Deshalb, und weil $\chi(\mathcal{F}^{\otimes m})$ ein nichtkonstantes Polynom mit positivem Höchstkoeffizienten ist, folgt:

$$h^0(X, \mathcal{F}^{\otimes m}) - h^1(X, \mathcal{F}^{\otimes m}) \rightarrow \infty \text{ für } m \rightarrow \infty, \text{ insbesondere}$$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} h^0(X, \mathcal{F}^{\otimes m}) \geq 2.$$

Daraus und aus der Induktionsvoraussetzung folgt:

Für jede analytische Menge A positiver Dimension ist

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} h^0(A, \mathcal{F}_A^{\otimes m}) \geq 2.$$

Nach 3.12 ist $\mathcal{F}$ ampel.

Bemerkung: Aus obigem Beweis ergibt sich unmittelbar:

$\mathcal{F}$ ist genau dann ampel, wenn $\limsup_{m \rightarrow \infty} \chi(\mathcal{F}_Z^{\otimes m}) = \infty$ für alle positiv-dimensionalen Unterräume Z von X.

Naheliegendermaßen ist wegen 5.2 folgende

5.3 Definition: Ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{F}$ vom Rang 1 heißt

- (1) pseudoampel, wenn $(\mathcal{F}^{\otimes s} \cdot Z) \geq 0$ für alle $0 \leq s \leq \dim X$ und alle s-dimensionalen Unterräume Z von X.

- (ii) numerisch effektiv, wenn $(\mathcal{L} \cdot C) \geq 0$ für alle ein-dimensionalen Unterräume C von X .
- (iii) numerisch positiv, wenn $(\mathcal{L} \cdot C) > 0$ für alle eindimensionalen Unterräume C von X .
- (iv) numerisch trivial, wenn $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}^{\otimes(-1)}$ numerisch effektiv sind.

Entsprechend definiert man pseudoampel, numerisch effektiv, numerisch positiv, numerisch trivial für Divisoren auf X .

5.4 Bemerkungen und Beispiele: a) Ist $\mathcal{L}$ ampel oder trivial, so ist $\mathcal{L}$ pseudoampel.

b) Ist $\mathcal{L}$ pseudoampel, so ist $\mathcal{L}$ numerisch effektiv.

c) Ist X eindimensional, und ist $\mathcal{L}$ numerisch positiv, so ist $\mathcal{L}$ ampel.

d) Ist $(\mathcal{L} \cdot C) \geq 0$ für jede reduzierte und irreduzible Kurve C in X , so ist $\mathcal{L}$ numerisch effektiv: Nach 4.20 genügt es zu zeigen, daß für jede irreduzible, nicht notwendig reduzierte Kurve C in X gilt: $(\mathcal{L} \cdot C) \geq 0$. Wäre nun $(\mathcal{L} \cdot C) < 0$ für eine solche Kurve, so wäre $\mathcal{L}_C^{\otimes(-1)}$ ampel auf C . Mithin wäre auch $\mathcal{L}_{C_{\text{red}}}^{\otimes(-1)}$ ampel auf C_{red} , also $(\mathcal{L} \cdot C_{\text{red}}) = -(\mathcal{L}_C^{\otimes(-1)} \cdot C_{\text{red}}) < 0$.

e) Sei $p: \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ die Projektion auf den ersten Faktor, und sei $\mathcal{L} := p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$. $\mathcal{L}$ ist weder ampel noch trivial:

$\mathcal{L}$ ist längs jeder Faser von p trivial, also nicht ampel; für $x \in \mathbb{P}_1$ und $C := \mathbb{P}_1 \times \{x\}$ ist $\mathcal{L}_C$ ampel auf C , d.h. $\mathcal{L}$ ist nicht trivial.

$\mathfrak{L}$ ist numerisch effektiv: Eine reduzierte irreduzible Kurve C in $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ liegt entweder in einer Faser von p , oder p induziert eine endliche holomorphe Abbildung $p_C: C \rightarrow \mathbb{P}_1$. Im ersten Fall ist $\mathfrak{L}$ längs C trivial, also $(\mathfrak{L} \cdot C) = 0 \geq 0$; im zweiten Fall ist $\mathfrak{L}_C = p_C^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$ nach 3.5 ampel auf C , und damit $(\mathfrak{L} \cdot C) > 0$.

In Verallgemeinerung von (5.4e) gilt:

5.5 Hilfssatz: Sei Y ein analytisches Schema, und sei $\varphi: Y \rightarrow X$ holomorph. Ist $\mathfrak{L}$ numerisch effektiv, so auch $\varphi^* \mathfrak{L}$.

Beweis: Nach (5.4d) genügt es zu zeigen: $(\varphi^* \mathfrak{L} \cdot C) \geq 0$ für jede reduzierte irreduzible Kurve C in Y .

Sei C eine solche Kurve.

Ist $\varphi(C)$ einpunktig, so ist $\varphi^* \mathfrak{L}$ längs C trivial, also $(\varphi^* \mathfrak{L} \cdot C) = 0$.

Andernfalls induziert φ eine endliche Abbildung φ_C von C auf $C' := \varphi(C)$.

Annahme: $(\varphi^* \mathfrak{L} \cdot C) < 0$.

C' ist eindimensional, also nach 3.15 projektiv. Sei $\mathcal{O}$ ein ampler lokal freier $\mathcal{O}_{C'}$ -Modul vom Rang 1, also $(\mathcal{O}) = (\mathcal{O} \cdot C') > 0$. Dann ist auch $\varphi_C^* \mathcal{O}$ ampel, d.h. $(\varphi_C^* \mathcal{O}) > 0$.

Es gibt daher positive natürliche Zahlen m, n so, daß $m \cdot (\varphi_C^* \mathcal{O}) + n \cdot (\varphi^* \mathfrak{L} \cdot C) = 0$. Wegen $(\varphi^* \mathfrak{L} \cdot C) = (\varphi_C^* (\mathfrak{L}_{C'}))$ folgt:

$$(\varphi_C^* (\mathcal{O}^{\otimes m} \otimes \mathfrak{L}_{C'}^{\otimes n})) = 0.$$

Andererseits ist $(\mathcal{O}^{\otimes m} \otimes \mathfrak{L}_{C'}^{\otimes n}) = m \cdot (\mathcal{O}) + n \cdot (\mathfrak{L} \cdot C') \geq m \cdot (\mathcal{O}) > 0$,

weil $\mathcal{G}$ numerisch effektiv ist, und weil $\mathcal{G}$ ampel auf C' ist.

Nach (5.3c) ist $\mathcal{G}^{\otimes m} \otimes \mathcal{G}_{C'}^{\otimes n}$ ampel auf C' .

Also ist $\varphi_C^*(\mathcal{G}^{\otimes m} \otimes \mathcal{G}_{C'}^{\otimes n})$ ampel auf C , und daher

$(\varphi_C^*(\mathcal{G}^{\otimes m} \otimes \mathcal{G}_{C'}^{\otimes n})) > 0$, ein Widerspruch.

5.6 Satz (Kleiman): Seien $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_s$ numerisch effektive lokal freie $\mathcal{O}_X$ -Moduln vom Rang 1 auf dem analytischen Schema X .

Dann gilt für jeden s -dimensionalen Unterraum Z von X :

$$(\mathcal{G}_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_s \cdot Z) \geq 0.$$

Insbesondere ist jeder numerische effektive lokal freie $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1 pseudoampel.

Beweis: 1) Seien $\mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_s$ ampel.

Vollständige Induktion nach s : Für $s=1$ ist $(\mathcal{G}_1 \cdot Z) \geq 0$, da

$\mathcal{G}_1$ numerisch effektiv.

$s \rightarrow s+1$: $\mathcal{G}_{s+1, Z}^{\otimes n}$ ist für hinreichend großes n sehr ampel, also von der Form $\mathcal{O}_Z(D)$ für einen effektiven Divisor D auf Z .

Für D , aufgefaßt als Hyperfläche in Z , gilt dann nach 4.21:

$$(\mathcal{G}_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{s+1} \cdot Z) = (\mathcal{G}_1 \cdot Z \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_s \cdot Z \cdot D) \geq 0 \text{ nach Induktions-}$$

voraussetzung.

2) Seien $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_s$ beliebig, und sei X projektiv.

Sei D ein sehr ampler Divisor auf X .

Beh.: Für alle natürlichen Zahlen α, β , $\beta \neq 0$, ist

$$\mathcal{G}_\sigma^{\otimes \alpha} \otimes \mathcal{O}_X(\beta D) \text{ ampel, } \sigma = 1, \dots, s.$$

Bew.: Sei $1 \leq \sigma \leq s$, $\mathfrak{L} := \mathfrak{L}_\sigma$. $\mathfrak{G}(\alpha, \beta) := \mathfrak{L}^{\otimes \alpha} \otimes \mathcal{O}_X(\beta D)$.

Vollständige Induktion nach $t = \dim X$: Für $t = 0$ ist die Behauptung trivial.

$t \rightarrow t+1$: Für alle Unterräume Z von X der Dimension $\leq t$ ist nach Induktionsvoraussetzung

$$(\mathfrak{G}(\alpha, \beta))^{\cdot s} \cdot Z > 0.$$

Nach dem Nakai-Kriterium folgt dann für jedes Paar (α, β) mit $(\mathfrak{G}(\alpha, \beta))^{\cdot (t+1)} > 0$: $\mathfrak{G}(\alpha, \beta)$ ist ampel. Für solche (α, β) gilt dann nach (1): $(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{G}(\alpha, \beta))^{\cdot t} \geq 0$. (*)

Die Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n die Selbstschnittzahl $(\mathfrak{G}(n, 1))^{\cdot (t+1)}$ zuordnet, definiert ein Polynom P .

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\beta \neq 0$, ist $P(\frac{\alpha}{\beta}) = \beta^{-t-1} \cdot (\mathfrak{G}(\alpha, \beta))^{\cdot (t+1)}$ und $P'(\frac{\alpha}{\beta}) = (t+1) \cdot \beta^{-t} \cdot (\mathfrak{G}(\alpha, \beta))^{\cdot t} \cdot \mathfrak{L}$, P' die Ableitung von P .

P ist somit ein Polynom mit folgender Eigenschaft:

Für alle nichtnegativen rationalen Zahlen r mit $P(r) > 0$ ist $P'(r) \geq 0$. (vgl. (*)).

Weil D ampel ist, ist $P(0) = (\mathfrak{G}(0, 1))^{\cdot (t+1)} = (D^{\cdot (t+1)}) > 0$, und daher $P(u) > 0$ für alle nichtnegativen reellen Zahlen u .

Also ist $(\mathfrak{G}(\alpha, \beta))^{\cdot (t+1)} = \beta^{t+1} \cdot P(\frac{\alpha}{\beta}) > 0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\beta \neq 0$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Sei nun Z ein s -dimensionaler Unterraum von X . Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $1 \leq \sigma \leq s$ ist $\mathfrak{L}_{\sigma, Z}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_Z(D)$ ampel. Nach Teil 1 des Beweises folgt:

$$\frac{1}{n^s} \cdot ((\mathfrak{L}_{1, Z}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_Z(D)) \cdot \dots \cdot (\mathfrak{L}_{s, Z}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_Z(D))) \geq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} + 1.$$

Wegen der Linearität der Schnittzahlen (4.15) ist

$$0 \leq n^{-s} \cdot ((\mathfrak{L}_{1,Z}^{\otimes n} \otimes_{\mathcal{O}_Z(D)}) \cdots (\mathfrak{L}_{s,Z}^{\otimes n} \otimes_{\mathcal{O}_Z(D)})) = (\mathfrak{L}_{1,Z} \cdots \mathfrak{L}_{s,Z}) + \\ + \sum_{\alpha=0}^{s-1} n^{\alpha-s} \cdot \left(\sum_{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_\alpha \leq s} (\mathfrak{L}_{\sigma_1,Z} \cdots \mathfrak{L}_{\sigma_\alpha,Z} \cdot \mathcal{O}_Z(D)^{\cdot (s-\alpha)}) \right).$$

Der zweite Summand des letzten Ausdrucks geht für $n \rightarrow \infty$ gegen 0.

$$\text{Also ist } (\mathfrak{L}_1 \cdots \mathfrak{L}_s \cdot Z) = (\mathfrak{L}_{1,Z} \cdots \mathfrak{L}_{s,Z}) \geq 0.$$

3) Sei X ein beliebiges analytisches Schema.

Sei $Z \hookrightarrow X$ ein Unterraum der Dimension s . Es gibt eine Pseudomodifikation $\tau: \bar{Z} \rightarrow Z$ mit projektivem $\bar{Z}$.

Nach 5.5 sind die $\tau^* \mathfrak{L}_{\sigma,Z}$, $\sigma=1, \dots, s$, numerisch effektiv auf $\bar{Z}$, also gilt nach Teil 2 des Beweises:

$$(\tau^* \mathfrak{L}_{1,Z} \cdots \tau^* \mathfrak{L}_{s,Z}) \geq 0.$$

$$\text{Nach 4.22 ist daher auch } (\mathfrak{L}_1 \cdots \mathfrak{L}_s \cdot Z) = (\mathfrak{L}_{1,Z} \cdots \mathfrak{L}_{s,Z}) \geq 0.$$

5.7 Bemerkung: Nach obigem Satz ist $\mathfrak{L}$ genau dann pseudoampel, wenn $\mathfrak{L}$ numerisch effektiv ist. Es gilt keine analoge Beziehung zwischen "ampel" und "numerisch positiv": Nach Mumford (siehe Hartshorne [11]) gibt es eine zweidimensionale projektive Mannigfaltigkeit, auf der ein numerisch positiver, nicht ampler Divisor existiert.

5.8 Korollar: Ist $\mathfrak{L}$ global erzeugt, so ist $\mathfrak{L}$ pseudoampel.

Beweis: Sei C eine reduzierte irreduzible Kurve in X .

Wäre $(\mathfrak{L} \cdot C) < 0$, so wäre $\mathfrak{L}_C^{\otimes(-1)}$ ampel auf C . Es gäbe daher ein $n \in \mathbb{N}$ so daß $\mathfrak{L}_C^{\otimes(-n)}$ global erzeugt ist.

Weil auch $\mathfrak{L}_C^{\otimes n}$ global erzeugt ist, wäre $\mathfrak{L}_C^{\otimes(-n)}$ nach 1.9 trivial, also nicht ampel.

Also ist $(\mathfrak{L} \cdot C) \geq 0$.

Nach (5.4d) ist $\mathfrak{L}$ numerisch effektiv, nach 5.6 pseudoampel.

5.9 Korollar: Sei Y ein analytisches Schema, und sei

$\varphi: Y \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung.

a) Ist $\mathfrak{L}$ pseudoampel, so auch $\varphi^*\mathfrak{L}$

b) Ist φ surjektiv, und ist $\varphi^*\mathfrak{L}$ pseudoampel, so auch $\mathfrak{L}$.

Beweis: a) Nach 5.5 ist $\varphi^*\mathfrak{L}$ numerisch effektiv, nach 5.6 pseudoampel.

b) Sei C eine reduzierte irreduzible Kurve in X . Wie in 8.6 gezeigt werden wird, gibt es eine Kurve C' in Y so, daß φ eine endliche Abbildung $\varphi_C: C' \rightarrow C$ induziert.

Wäre $(\mathfrak{L} \cdot C) < 0$, so wäre $\mathfrak{L}_C^{\otimes(-1)}$ ampel auf C , und daher

$\varphi_C^*\mathfrak{L}_C^{\otimes(-1)}$ ampel auf C' .

Also wäre $0 \leq (\varphi^*\mathfrak{L} \cdot C) = ((\varphi^*\mathfrak{L})_{C'}) = (\varphi_C^* \mathfrak{L}_C) = -(\varphi_C^*\mathfrak{L}_C^{\otimes(-1)}) < 0$.

Aus Teil 2 des Beweises von 5.6 ergibt sich noch

5.10 Korollar: Ist $\mathfrak{L}$ pseudoampel, so gilt für jeden amplen

$\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{E}$: $\mathfrak{L} \otimes \mathcal{E}$ ist ampel.

Beweis wie im Beweis von 5.6.

5.11 Korollar: Ist $\mathcal{E}$ numerisch trivial, so ist ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{E}$ vom Rang 1 genau dann ampel, wenn $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ es ist.

Beweis: Nach 5.6 sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}^{\otimes(-1)}$ pseudoampel. Nach 5.10 folgt die Behauptung.

5.12 Definition: Seien $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$, lokal freie $\mathcal{O}_X$ -Moduln vom Rang 1. $\mathcal{E}$ heißt numerisch äquivalent zu $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}'$, wenn $\mathcal{E}^{\otimes(-1)} \otimes \mathcal{E}'$ numerisch trivial ist.

Ein Divisor D heißt numerisch äquivalent zu einem Divisor D' , wenn $\mathcal{O}_X(D)$ numerisch äquivalent zu $\mathcal{O}_X(D')$ ist.

$\approx$ induziert eine strukturverträgliche Äquivalenzrelation auf der Gruppe der Isomorphieklassen von lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Moduln vom Rang 1, und damit auch auf der Gruppe $\text{Pic}(X)$ der linearen Äquivalenzklassen von Divisoren auf X . Wir bezeichnen diese Äquivalenzrelation wieder mit $\approx$.

Nach 5.11 ist ein Divisor auf X genau dann ampel, wenn seine Äquivalenzklasse modulo $\approx$ einen amplen Divisor enthält. Wir untersuchen daher die Gruppe $\text{Div}(X)/\approx \cong \text{Pic}(X)/\approx$.

5.13 Lemma: $\text{Div}(X)/\approx$ ist eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe.

Beweis: 1) $\text{Div}(X)/\approx$ ist endlich erzeugt.

Wir fassen $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ als die Gruppe der lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Moduln vom Rang 1 auf (vgl. 1.11).

Wegen $\text{Div}(X) \subset H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ genügt es zu zeigen: $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)/\approx$ ist endlich erzeugt (wir unterscheiden nicht zwischen einem Geradenbündel G und dem lokal freien $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1 $\mathcal{O}_X(G)$, vgl. 1.11).

Die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$ liefert eine exakte Sequenz $\dots \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\exp} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$, wobei $\exp(f) := e^{2\pi i f}$.

Weil X kompakt ist, ist $H^2(X, \mathbb{Z})$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe; also ist auch $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)/\text{Im exp}$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

Beh.: Jedes Geradenbündel aus Im exp ist numerisch trivial.

Bew.: Sei $G \in \text{Im exp}$. Sei $(U_n)_{n=1, \dots, N}$ eine Steinsche Überdeckung von X , und sei $(\xi_{n,m})_{n,m}$, $\xi_{n,m} \in \mathcal{O}_X(U_n \cap U_m)$, ein Kozyklus in $\mathcal{O}_X$ so, daß G durch $((\exp \xi_{n,m}))$ definiert wird.

Sei C eine Kurve in X , und sei k eine natürliche Zahl, $k > |(G \cdot C)|$.

G' sei das durch $(\exp(\frac{\xi_{n,m}}{k}))$ definierte Geradenbündel.

Es ist $(G \cdot C) = (G' \otimes^k C) = k \cdot (G' \cdot C)$.

Wäre $(G \cdot C) \neq 0$, so auch $(G' \cdot C)$, und es würde folgen:

$k = |k| = \frac{|(G \cdot C)|}{|(G' \cdot C)|} \leq |(G \cdot C)|$, im Widerspruch zur Definition von k .

Also ist G numerisch trivial.

$H^1(X, \mathcal{O}_X^*)/\approx$ ist somit Faktorgruppe der endlich erzeugten abelschen Gruppe $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)/\text{Im exp}$, also endlich erzeugt.

2) $\text{Div}(X)/\approx$ ist frei:

$\text{Div}(X)/\approx$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe; es genügt daher zu zeigen: $\text{Div}(X)/\approx$ ist torsionsfrei.

Sei $D \in \text{Div}(X)$ nicht numerisch trivial. Dann gibt es eine Kurve C in X mit $(D \cdot C) \neq 0$. Damit ist auch $(nD \cdot C) = n \cdot (D \cdot C) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Also gilt für die Äquivalenzklasse $[D]$ von D : $n \cdot [D] \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Bemerkung: In der algebraischen Geometrie beweist man 5.13 mit Hilfe des Satzes von Néron-Severi, der besagt, daß die Gruppe der algebraischen Äquivalenzklassen von Divisoren auf einem algebraischen Schema eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist. Man zeigt dann, daß algebraisch äquivalente Divisoren numerisch äquivalent sind.

Sei $F(X)$ die von allen Kurven in X erzeugte freie abelsche Gruppe. Für $C = n_1 \cdot C_1 + \dots + n_k \cdot C_k \in F(X)$, $C_1, \dots, C_k$ Kurven in X , $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, setzt man $(D \cdot C) := n_1 (D \cdot C_1) + \dots + n_k (D \cdot C_k)$ für alle Divisoren D auf X .

$C \in F(X)$ heißt numerisch trivial, $C \approx 0$, falls $(D \cdot C) = 0$ für alle $D \in \text{Div}(X)$. C heißt numerisch äquivalent zu $C' \in F(X)$, wenn $C - C'$ numerisch trivial ist. Schreibweise: $C \approx C'$.

$\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $F(X)$.

Wir werden von jetzt an Kurven auf X als effektive Kurven, Elemente von $F(X)$ als Kurven bezeichnen.

5.14 Korollar: $F(X)/\approx$ ist eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe vom Rang $\text{rg Div}(X)/\approx$.

Beweis: Sei $r = \text{rg Div}(X)/\approx$, und seien $D_1, \dots, D_r \in \text{Div}(X)$ so gewählt, daß ihre Äquivalenzklassen modulo $\approx$ $\text{Div}(X)/\approx$ erzeugen.

$d: F(X)/\approx \rightarrow \mathbb{Z}^r$, $[C] \mapsto ((D_\rho \cdot C))_{1 \leq \rho \leq r}$, ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus: d ist wohldefiniert und additiv nach Definition von $\approx$. Ist $d([C]) = 0$, so ist $(D_\rho \cdot C) = 0$ für $\rho = 1, \dots, r$. Zu beliebigem $D \in \text{Div}(X)$ gibt es $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ so, daß $D - n_1 D_1 - \dots - n_r D_r$ numerisch trivial ist. Also ist $(D \cdot C) = 0$ für alle $D \in \text{Div}(X)$, d.h. $[C] = 0$.

$F(X)/\approx$ ist somit eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe vom Rang $s \leq r$.

Völlig analog zeigt man: Sind $C_1, \dots, C_s \in F(X)$ so gewählt, daß ihre Äquivalenzklassen modulo $\approx$ $F(X)/\approx$ erzeugen, so ist $\text{Div}(X)/\approx \rightarrow \mathbb{Z}^s$, $[D] \mapsto ((D \cdot C_\sigma))_{1 \leq \sigma \leq s}$, ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir setzen $A_1 := A_1(X) := F(X)/\approx \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ und $A^1 := A^1(X) := \text{Div}(X)/\approx \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Nach 5.13 und 5.14 sind A_1 und A^1 endlich-dimensionale reelle Vektorräume gleicher Dimension $r = \text{rg Div}(X)/\approx$.

Für $C = t_1 [C_1] + \dots + t_r [C_r] \in A_1$, $D = s_1 [D_1] + \dots + s_r [D_r] \in A^1$,

$C_1, \dots, C_r \in F(X)$, $D_1, \dots, D_r \in \text{Div}(X)$, $s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}$,

$$\text{setzt man } (D \cdot C) = \sum_{\rho=1}^r \sum_{\sigma=1}^r s_{\sigma} t_{\rho} \cdot (D_{\sigma} \cdot C_{\rho}).$$

Damit wird A^1 Dualraum von A_1 .

5.15 Bemerkung: Ist C eine effektive Kurve in X mit den irreduziblen Komponenten $C_1, \dots, C_k$, so sind nach 4.20 C und $\sum C_k$ (vgl. 1.1) numerisch äquivalent. $1 \cdot C \in F(X)$ und $\sum 1 \cdot C_k \in F(X)$ definieren also das gleiche Element in A_1 . Insbesondere läßt sich jedes Element von A_1 schreiben als $t_1[C_1] + \dots + t_r[C_r]$, C_{ρ} irreduzible effektive Kurven in X .

Wir werden von jetzt an, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, Divisoren bzw. Kurven und die durch sie definierten Elemente von $A^1(X)$ bzw. $A_1(X)$ mit dem gleichen Symbol bezeichnen.

Für den Rest dieses Paragraphen sei X ein analytisches Schema, das eine Überdeckung aus projektiv-abschließbaren offenen Mengen besitzt (vgl. 4.1). Damit ist insbesondere die Existenz von Hyperflächen in X und jedem reduzierten irreduziblen Unterraum von X sichergestellt.

5.16 Lemma: Ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ vom Rang 1 ist genau dann ampel, wenn zu jedem Divisor E eine natürliche Zahl m so existiert, daß $\mathfrak{F}^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_X(E)$ numerisch effektiv ist.

Beweis: Ist $\mathfrak{L}$ ampel, und ist $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1, so ist $\mathfrak{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{E}$ nach 3.8 für alle hinreichend großen m ampel, also insbesondere numerisch effektiv.

Es gelte umgekehrt: Zu jedem Divisor E auf X existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathfrak{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_X(E)$ numerisch effektiv ist.

Dann ist $\mathfrak{L}^{\otimes m}$ für geeignetes m numerisch effektiv. Also ist auch $\mathfrak{L}$ numerisch effektiv, und damit nach 5.6 pseudoampel.

Wir zeigen durch vollständige Induktion nach s : $\mathfrak{L}_Z$ ist für jeden s -dimensionalen Unterraum Z von X ampel.

Für $s=0$ ist die Behauptung trivial.

$s \rightarrow s+1$: Wegen 3.10 und 3.11 kann Z ohne Einschränkung reduziert und irreduzibel angenommen werden. Weil X eine Überdeckung aus projektiv abschließbaren Mengen besitzt, gibt es eine Hyperfläche E auf X , die Z trifft und Z nicht enthält. Es ist daher $\dim Z \cap E = s$, weil Z irreduzibel ist.

Nach 4.17 folgt, weil Z reduziert und irreduzibel ist:

$(\mathfrak{L}^{\cdot s} \cdot \mathcal{O}_X(E) \cdot Z) = (\mathfrak{L}_Z^{\cdot s} \cdot Z \cap E) > 0$, letzteres nach Induktionsvoraussetzung.

Sei P das durch $P(n) := ((\mathcal{O}_Z(E) \otimes \mathfrak{L}_Z^{\otimes n})^{\cdot (s+1)})$, $n \in \mathbb{N}$, definierte Polynom. Der Höchstkoeffizient von P ist entweder $(\mathfrak{L}_Z^{\cdot (s+1)})$ oder $(\mathfrak{L}_Z^{\cdot s} \cdot \mathcal{O}_Z(E))$, also auf jeden Fall positiv, weil $\mathfrak{L}$ pseudoampel ist.

Sei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $P(n) > 0$ für alle $n \geq m$. Seien weiter $m', m'' \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathfrak{L}' := \mathfrak{L}^{\otimes m'} \otimes (\mathfrak{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_X(E))$ und $\mathfrak{L}'' := \mathfrak{L}^{\otimes m''} \otimes \mathcal{O}_X(-E)$ numerisch effektiv sind.

Es ist $\mathfrak{F}' \otimes \mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}^{\otimes k}$, $k = m + m' + m''$, und daher

$$\begin{aligned} k^{s+1} \cdot (\mathfrak{F}_Z^{s+1}) &= ((\mathfrak{F}_Z' \otimes \mathfrak{F}_Z'')^{s+1}) = \\ &= \sum_{\sigma=0}^{s+1} \binom{s+1}{\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_Z'^{s+1-\sigma} \cdot \mathfrak{F}_Z''^{\sigma}) = \\ &= (\mathfrak{F}_Z'^{s+1}) + \sum_{\sigma=1}^{s+1} \binom{s+1}{\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_Z'^{s+1-\sigma} \cdot \mathfrak{F}_Z''^{\sigma}) \end{aligned}$$

Für $\sigma \geq 1$ ist nach 5.6 $(\mathfrak{F}_Z'^{s+1-\sigma} \cdot \mathfrak{F}_Z''^{\sigma}) \geq 0$, denn $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ sind numerisch effektiv.

$$(\mathfrak{F}_Z'^{s+1}) = ((\mathfrak{F}_Z^{\otimes(m+m')} \otimes \mathcal{O}_Z(E))^{s+1}) = P(m+m') > 0 \text{ nach}$$

Konstruktion von m.

Also ist $(\mathfrak{F}_Z^{s+1}) > 0$, und damit $\mathfrak{F}_Z$ ampel auf Z .

Insgesamt folgt: $\mathfrak{F}$ ist ampel.

$A_1^+ := A_1^+(X) \subset A_1(X)$ sei der von den Äquivalenzklassen der effektiven Kurven in X erzeugte Kegel in A_1 (d.h. die kleinste Obermenge K von $\{[C] : C \text{ effektive Kurve in } X\}$, für die gilt: $K + K \subset K$, und $\alpha \cdot K \subset K$ für alle positiven reellen α).

Jedes Element aus A_1^+ läßt sich schreiben als $\sum t_\rho \cdot [C_\rho]$, $t_\rho \geq 0$, C_ρ effektive irreduzible Kurve in X (vgl. 5.15).

$P := P(X) := \{D \in A_1^+(X) : (D \cdot C) \geq 0 \text{ für alle } C \in A_1^+(X)\}$ heißt der pseudoample Kegel von X .

Nach 5.16 ist ein Divisor D auf X genau dann ampel, wenn für jeden Divisor E auf X gilt: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $mD + E \in P$.

Von jetzt an seien A_1 und A^1 mit der Topologie des $\mathbb{R}^r$,
 $r = \dim A_1$ versehen.

5.17 Satz: Für einen kompakten komplexen Raum X , der eine Überdeckung aus projektiv-abschließbaren offenen Mengen besitzt, sind äquivalent:

- (i) X ist projektiv.
- (ii) $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$.
- (iii) $\overline{A_1^+}$ ist ein spitzer Kegel, d.h. $\overline{A_1^+} \cap \overline{(-A_1^+)} = \{0\}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei D ein ample Divisor auf X . Seien $D_1, \dots, D_r \in \text{Div}(X)$ so gewählt, daß ihre Äquivalenzklassen eine Basis von $A^1(X)$ bilden.

Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $mD + D_\rho$ und $mD - D_\rho$ für alle $m \geq m_0$ und alle $\rho = 1, \dots, r$ ample sind.

Für $E = a_1 D_1 + \dots + a_r D_r \in A^1$ sei $\|E\| := \max\{|a_\rho| : 1 \leq \rho \leq r\}$.
 $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf A^1 .

Sei $\varepsilon := (2rm_0)^{-1}$. Für $0 \neq E = a_1 D_1 + \dots + a_r D_r \in A^1$ mit $\|E\| < \varepsilon$ gilt dann: $(\|E\| \cdot r)^{-1} \geq 2m_0$. Sei n das größte Ganze von $\frac{1}{r\|E\|}$; es ist $n > m_0$.

Sei $1 \leq \rho \leq r$.

1) $a_\rho = 0$. Dann ist $\frac{1}{r} \cdot D + a_\rho \cdot D_\rho = \frac{1}{r} \cdot D \in P$, da $D \in P$.

2) $a_\rho \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \frac{1}{r} \cdot D + a_\rho \cdot D_\rho &= |a_\rho| \cdot \left(\frac{1}{r|a_\rho|} \cdot D + \frac{a_\rho}{|a_\rho|} \cdot D_\rho \right) = \\ &= |a_\rho| \cdot (nD + \frac{a_\rho}{|a_\rho|} \cdot D_\rho) + |a_\rho| \cdot \left(\frac{1}{r|a_\rho|} - n \right) \cdot D \end{aligned}$$

$nD + \frac{a_\rho}{|a_\rho|} \cdot D_\rho$ ist ampel, da $n > m_0$. Also ist $|a_\rho| \cdot (nD + \frac{a_\rho}{|a_\rho|} \cdot D_\rho) \in P$, da $|a_\rho| > 0$.

Weiter ist $r \cdot |a_\rho| \leq r \cdot \|E\|$, und daher $\frac{1}{r|a_\rho|} - n > 0$. Also ist auch $|a_\rho| \cdot (\frac{1}{r|a_\rho|} - n) \cdot D \in P$.

Insgesamt: $\frac{1}{r} \cdot D + a_\rho \cdot D_\rho \in P$, und daher:

$$D + E = \frac{1}{r} \cdot D + a_1 \cdot D_1 + \dots + \frac{1}{r} \cdot D + a_r \cdot D_r \in P.$$

P enthält also eine ε -Umgebung von D , mithin $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien $D_1, \dots, D_r \in \text{Div}(X)$ so gewählt, daß ihre Bilder in A^1 eine Basis bilden, und sei $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm auf A^1 .

Zu $D = a_1 D_1 + \dots + a_r D_r \in \overset{\circ}{P}$ wähle man $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{Q}$ so, daß $b_1 D_1 + \dots + b_r D_r \in \overset{\circ}{P}$. Sei weiter $m \in \mathbb{N}$ so, daß $c_\rho := m \cdot b_\rho \in \mathbb{Z}$ für alle $\rho = 1, \dots, r$.

Mit P ist auch $\overset{\circ}{P}$ ein Kegel, und daher $c_1 D_1 + \dots + c_r D_r = m \cdot (b_1 D_1 + \dots + b_r D_r) \in \overset{\circ}{P}$.

Wegen $D_\rho \in \text{Div}(X)$ und $c_\rho \in \mathbb{Z}$, $\rho = 1, \dots, r$, ist $c_1 D_1 + \dots + c_r D_r$ Äquivalenzklasse eines Divisors $H \in \text{Div}(X)$.

H ist ampel: Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß die ε -Umgebung von H in P liegt. Zu einem beliebigen $E \in \text{Div}(X)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $ne > \|E\|$. Dann ist $nH + E = n \cdot (H + \frac{1}{n} \cdot E) \in P$, denn es ist $\|\frac{1}{n} \cdot E\| < \varepsilon$.

Somit ist H nach 5.16 ampel, und daher X projektiv.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Sei $C_1, \dots, C_r$ eine Basis von A_1 und sei

$\{D_1, \dots, D_r\}$ die dazu duale Basis in A^1 . Dann ist das Dualsystem $(A_1, A^1, (\cdot))$ vermöge $D_\rho \mapsto e_\rho, C_\rho \mapsto e_\rho, \rho = 1, \dots, r$, isomorph zum Dualsystem $(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r, (\cdot, \cdot))$. Dabei sei $(\cdot, \cdot)$ das euklidische Skalarprodukt, $\{e_1, \dots, e_r\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^r$.

Wegen $P = \{D \in A^1 : (D \cdot C) \geq 0 \text{ für alle } C \in A_1^+\}$ folgt die Behauptung aus (5.18 c) mit $n := r, K := A_1^+$.

5.18 Hilfssatz: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel.

Dann ist $K^* := \{y \in \mathbb{R}^n : (y, x) \geq 0 \text{ für alle } x \in K\}$ ein abgeschlossener Kegel, und es gilt:

a) $\overline{K^*} = K^*$.

b) $K^{**} := (K^*)^* = \overline{K}$.

c) $\overline{K} \cap \overline{(-K)} = \{0\}$ genau dann, wenn $(K^*)^\circ \neq \emptyset$.

Beweis: K^* ist nach Konstruktion ein abgeschlossener Kegel.

Wegen $K \subset \overline{K}$ folgt $\overline{K^*} \subset K^*$. (1)

Ist $x \in K$, so ist $(x, y) \geq 0$ für alle $y \in K^*$, und daher $x \in K^{**}$.

Weil K^{**} abgeschlossen ist, folgt: $\overline{K} \subset K^{**}$. (2)

Sei $x \in \mathbb{R}^n - \overline{K}$. Es gibt ein $y \in \overline{K}$ mit $\|x - y\| = d(x, \overline{K}) > 0$.

Dabei sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Es ist $(y, x - y) = 0$.

Beh.: $\overline{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^n : (z, y - x) \geq 0\}$, d.h. $y - x \in \overline{K^*} \subset K^*$.

Bew.: Annahme: Es gibt ein $z \in \overline{K}$ mit $(z, y - x) < 0$. Dann ist insbesondere $z \neq 0$.

Wegen $(z, x - y) > 0$ ist $z' := \frac{(z, x - y)}{\|z\|^2} \cdot z$ und damit auch $y + z'$

Element von $\overline{K}$.

Es gilt: $\|x - (y + z')\|^2 = \|x - y\|^2 + \|z'\|^2 - 2(x-y, z') =$
 $\|x - y\|^2 + \frac{(z, x-y)^2}{\|z\|^2} - 2 \cdot \frac{(z, x-y)}{\|z\|^2} \cdot (x-y, z) =$
 $= \|x - y\|^2 - \frac{(z, x-y)^2}{\|z\|^2} < \|x - y\|^2$ im Widerspruch zur Definition von y .

Somit ist $y - x \in \overline{K^*} \subset K^*$.

Wäre $x \in K^{**}$, so wäre wegen $y - x \in K^*$

$$0 \leq (x, y-x) = (x-y, y-x) + (y, y-x) = -\|x - y\|^2 < 0.$$

Also ist $x \notin K^{**}$.

Damit ist bewiesen: $K^{**} \subset \overline{K}$. Zusammen mit (2) folgt $\overline{K} = K^{**}$,
d.h. (b) ist bewiesen.

Aus (b), angewandt auf $K^* = \overline{K^*}$, folgt: $K^* = \overline{K^*} = (K^*)^{**} =$
 $(K^{**})^* = \overline{K^*}$. Damit ist (a) bewiesen.

Beh.: Der offene Kern von K^* ist genau dann leer, wenn K^*
keine Basis des $\mathbb{R}^n$ enthält.

Bew.: Es ist $0 \in K^*$ nach Definition von K^* .

K^* enthält eine Basis $\{x_1, \dots, x_n\} \Leftrightarrow K^*$ enthält die kon-
vexe Hülle von $\{0, x_1, \dots, x_n\} \Leftrightarrow K^*$ enthält ein n -Simplex
 $\Leftrightarrow$ der offene Kern von K^* ist nicht leer.

Also gilt: $(K^*)^\circ = \emptyset \Leftrightarrow$ der von K^* erzeugte Untervektorraum
hat die Dimension $< n \Leftrightarrow K^*$ liegt in einem $(n-1)$ -dimen-
sionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ es gibt ein $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ so,
daß $K^* \subset \{x \in \mathbb{R}^n : (y, x) = 0\} \Leftrightarrow$ es gibt ein $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ so,

daß $(y, x) \geq 0$ und $(-y, x) \geq 0$ für alle $x \in K^*$ $\Leftrightarrow$ es gibt ein $0 \neq y \in K^{**} \cap (-K^{**}) = \overline{K} \cap \overline{(-K)}$.

Damit ist (c) bewiesen.

Für den Beweis des Chevalley-Kriteriums in §6 benötigen wir noch einen weiteren (auf Carathéodory zurückgehenden) Hilfssatz über Kegel im $\mathbb{R}^n$.

5.19 Hilfssatz: Sei $R \subset \mathbb{R}^n$, und sei K der von R erzeugte Kegel.

Dann gilt: Zu jedem $x \in K$ gibt es $x_1, \dots, x_n \in R$ und nicht-negative reelle Zahlen $b_1, \dots, b_n$ so, daß $x = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$.

Beweis: Sei $x \in K$. Dann gibt es $x_1, \dots, x_m \in R$ und nicht-negative reelle Zahlen $a_1, \dots, a_m$ so, daß $x = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$.

Ist $m \leq n$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ mit $c_1 x_1 + \dots + c_m x_m = 0$, $|c_1| + \dots + |c_m| > 0$.

Ohne Einschränkung sei mindestens ein $c_\mu < 0$ (andernfalls ersetze man alle c_μ durch $-c_\mu$).

Sei $d := \min \left\{ \frac{a_\mu}{|c_\mu|} : c_\mu < 0 \right\}$, $b_\mu := a_\mu + d \cdot c_\mu$, $\mu = 1, \dots, m$.

Für $\mu = 1, \dots, m$ ist $b_\mu \geq a_\mu - d \cdot |c_\mu| \geq a_\mu - \frac{a_\mu}{|c_\mu|} \cdot |c_\mu| = 0$, falls $c_\mu < 0$, und $b_\mu = a_\mu + d c_\mu \geq 0$, wenn $c_\mu \geq 0$.

Also sind alle b_μ nicht-negativ.

Es gibt ein μ_0 , $1 \leq \mu_0 \leq m$ mit $d \cdot |c_{\mu_0}| = a_{\mu_0}$. Ohne Einschränkung sei $\mu_0 = m$. Notwendig ist dann $c_m < 0$.

$$\begin{aligned}\text{Es ist } x &= a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + d \cdot (c_1 x_1 + \dots + c_m x_m) \\ &= b_1 x_1 + \dots + b_m x_m.\end{aligned}$$

Wegen $b_m = a_m + d c_m = a_m - \frac{a_m}{|c_m|} \cdot |c_m| = 0$ folgt:

$$x = b_1 x_1 + \dots + b_{m-1} x_{m-1}.$$

Nach endlich vielen solchen Schritten folgt die Behauptung.

§ 6 Das Chevalley - Kriterium

Sei X ein kompakter komplexer Raum.

Ist X abgeschlossener Unterraum eines $\mathbb{P}_N$, so gibt es zu je endlich vielen Punkten in X eine Hyperebene in $\mathbb{P}_N$, die keinen dieser Punkte enthält. Jede endliche Teilmenge von X liegt somit in einer projektiv-abschließbaren offenen Teilmenge von X .

Diese Eigenschaft ist charakteristisch für projektiv-algebraische Räume:

6.1 Satz (Chevalley-Kriterium): Sei X ein kompakter komplexer Raum.

Liegt jede endliche Teilmenge von X in einer projektiv-abschließbaren offenen Teilmenge von X , so ist X projektiv.

Zum Beweis verwenden wir folgenden

6.2 Hilfssatz: Sei X ein analytisches Schema, und sei $U \subset X$ eine projektiv-abschließbare Teilmenge von X .

Dann gibt es Divisoren $D_1, \dots, D_r \in \text{Div}(X)$ mit folgenden Eigenschaften.

a) Die $D_1, \dots, D_r$ bilden eine Basis von $A^1(X)$.

b) Für jede irreduzible Kurve C in X , die U trifft, ist

$$(D_\rho \cdot C) > 0, \quad \rho = 1, \dots, r.$$

Beweis: Seien $D'_1, \dots, D'_r \in \text{Div}(X)$ so gewählt, daß ihre Äquivalenzklassen in $A^1(X)$ eine Basis bilden.

Sei E eine Hyperfläche in X mit $X - E = U$, und sei $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation mit Zentrum in E so, daß $\pi^{-1}(E)$ Träger eines sehr ampel Divisors H auf $\bar{X}$ ist (vgl. Definition von "projektiv-abschließbar" in 4.1).

Sei $\bar{E} := \pi^* E$ und $\bar{D}'_\rho := \pi^* D'_\rho$, $\rho = 1, \dots, r$.

Wegen $\text{supp } H = \text{supp } \bar{E}$ gibt es ein $m' \in \mathbb{N}$ so, daß $H \hookrightarrow m' \cdot \bar{E}$. Daher ist $m' \cdot \bar{E} - H$ ein effektiver Divisor auf $\bar{X}$.

Ferner gibt es, weil H ampel ist, ein $m'' \in \mathbb{N}$ so, daß $\bar{D}'_\rho + m'' \cdot H$ für alle $\rho = 1, \dots, r$ ampel ist.

Sei $m := m' \cdot m''$. Für eine irreduzible Kurve C in X , die U trifft, bezeichne $\bar{C}$ die strikte Transformierte von C unter π (vgl. 1.6).

Für $1 \leq \rho \leq r$ ist

$$\begin{aligned} ((D'_\rho + mE) \cdot C) &= ((\bar{D}'_\rho + m\bar{E}) \cdot \bar{C}) = ((\bar{D}'_\rho + m''H - m''H + m\bar{E}) \cdot \bar{C}) = \\ &= ((\bar{D}'_\rho + m''H) \cdot \bar{C}) + m'' \cdot ((m'\bar{E} - H) \cdot \bar{C}). \end{aligned}$$

Der erste Summand des letzten Ausdrucks ist positiv, weil $\bar{D}'_\rho + m''H$ ampel ist. Der zweite Summand ist nicht-negativ, weil $m'\bar{E} - H$ einen effektiven Divisor auf $\bar{C}$ induziert: $\bar{C}$ liegt nicht im Träger von $m'\bar{E} - H$, und $m'\bar{E} - H$ ist nach Wahl von m' ein effektiver Divisor auf $\bar{X}$.

Für $1 \leq \rho \leq r$ sei $D_\rho := D'_\rho + mE$. Dann bilden die D_ρ eine Basis von A^1 mit der gewünschten Eigenschaft.

Beweis des Chevalley-Kriteriums 6.1:

Trivialerweise besitzt X eine Überdeckung aus projektiv-abschließbaren offenen Mengen. Damit sind die Ergebnisse aus §4 und §5 anwendbar.

Wir zeigen: Sind $C, C' \in \overline{A_1^+(X)}$ mit $C + C' = 0$, so ist $C = C' = 0$. Daraus ergibt sich dann nach 5.17 die Projektivität von X .

Es gibt Folgen $(C_n), (C'_n)$ in $A_1^+(X)$ mit $C = \lim C_n$ und $C' = \lim C'_n$.

Nach 5.19 gibt es für alle n Darstellungen

$$C_n = a_{n,1}C_{n,1} + \dots + a_{n,r}C_{n,r}, \quad C'_n = a_{n,r+1}C_{n,r+1} + \dots + a_{n,2r}C_{n,2r}$$

$a_{n,\rho}$ nichtnegative reelle Zahlen, $C_{n,\rho}$ effektive Kurven.

Nach 5.15 können die $C_{n,\rho}$ irreduzibel gewählt werden.

Es gibt ein Paar $((n_k), Z)$, (n_k) eine Teilfolge von $\mathbb{N}$, Z eine analytische Menge in X , mit folgenden Eigenschaften:

$$(*) \left\{ \begin{array}{ll} (i) & \text{Zu jeden } k \text{ existiert ein } 1 \leq \rho \leq 2r \text{ mit } C_{n_k, \rho} \subset Z. \\ (ii) & \text{Ist } Y \hookrightarrow X, Y \subset Z, \text{ so gibt es nur endlich viele} \\ & (n_k, \rho) \text{ mit } C_{n_k, \rho} \subset Y. \end{array} \right.$$

Man wähle e.g. Z als minimale analytische Menge in X , die unendlich viele $C_{n,\rho}$ enthält, und (n_k) so, daß zu jedem k ein ρ existiert mit $C_{n_k, \rho} \subset Z$.

Ein solches Z ist stets irreduzibel, denn andernfalls würde eine irreduzible Komponente $\neq Z$ unendlich viele $C_{n,\rho}$ enthalten, im Widerspruch zu (ii).

Beh.1: Ist (n_k) eine Teilfolge von $\mathbb{N}$, und sind $Z_1, \dots, Z_s$ paarweise verschiedene analytische Mengen in X so, daß für $((n_k), Z_\sigma)$, $\sigma = 1, \dots, s$, (*) erfüllt ist, so ist $s \leq 2r$.

Bew.: Für $1 \leq \sigma \leq s$ sei $Y_\sigma := Z_\sigma \cap \bigcup_{\tau \neq \sigma} Z_\tau$.

Jedes Y_σ enthält wegen $Y_\sigma \subsetneq Z_\sigma$ nur endlich viele $C_{n_k, \rho}$.

Sei $N \in \mathbb{N}$ so, daß $C_{n_k, \rho} \not\subset \bigcup_{\tau=1}^s Y_\tau$ für $k \geq N$, $1 \leq \rho \leq 2r$.

Wegen (i) gibt es zu jedem $k \geq N$ und jedem $1 \leq \sigma \leq s$ ein $1 \leq \rho_\sigma \leq 2r$ mit $C_{n_k, \rho_\sigma} \subset Z_\sigma$.

Für festes $k \geq N$ sind die C_{n_k, ρ_σ} notwendig paarweise verschieden, da $C_{n_k, \rho_\sigma} \not\subset Y_1 \cup \dots \cup Y_s$.

Also ist $s \leq 2r$.

Beh. 2: Es gibt eine Teilfolge (n_k) von $\mathbb{N}$ und paarweise verschiedene analytische Mengen $Z_1, \dots, Z_s$ in X mit folgenden Eigenschaften:

- a) Für $((n_k), Z_\sigma)$, $\sigma = 1, \dots, s$, ist (*) erfüllt.
- b) Ist Y analytisch in X , und enthält Y unendlich viele $C_{n_k, \rho}$, so gibt es ein $1 \leq \sigma \leq s$ mit $Z_\sigma \subset Y$.

Bew.: Sei (m_k) eine Teilfolge von $\mathbb{N}$, und seien $Z_1, \dots, Z_t$ paarweise verschiedene analytische Mengen in X , so, daß für $((m_k), Z_\tau)$, $1 \leq \tau \leq t$, (*) erfüllt ist.

Sei Y eine analytische Menge in X , die unendlich viele $C_{m_k, \rho}$ enthält, und sei $Y' \hookrightarrow Y$ minimal mit dieser Eigenschaft.

Es gibt eine Teilfolge (m'_k) von (m_k) so, daß für $((m'_k), Y')$ (*) erfüllt ist. Trivialerweise ist (*) auch für $((m'_k), Z_\tau)$, $\tau = 1, \dots, t$, erfüllt.

Ist $Y' = Z_\tau$ für ein $1 \leq \tau \leq t$, so gilt für dieses τ : $Z_\tau \subset Y$.

Andernfalls setze man $Z_{t+1} := Y'$.

Wegen Beh.1 folgt nach höchstens $2r - t$ solcher Schritte die Behauptung.

Seien nun $(n_k), Z_1, \dots, Z_s$ gemäß Beh.2. Man wähle in jedem Z_σ einen Punkt z_σ .

Sei $U \subset X$ projektiv-abschließbar mit $\{z_1, \dots, z_s\} \subset U$, und sei E eine Hyperfläche in X mit $U = X - E$.

E enthält keines der Z_σ ; also enthält E nach Beh.2 höchstens endlich viele $C_{n_k, \rho}$. Ohne Einschränkung enthalte also E keines der $C_{n_k, \rho}$.

Nach 6.2 gibt es eine Basis $\{D_1, \dots, D_r\}$ von $A^1(X)$ mit $(D_\sigma \cdot C_{n_k, \rho}) \geq 0$ für $\sigma = 1, \dots, r$, $\rho = 1, \dots, 2r$, $k \in \mathbb{N}$.

Somit ist für alle $\sigma = 1, \dots, r$

$$(D_\sigma \cdot C) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k, 1} \cdot (D_\sigma \cdot C_{n_k, 1}) + \dots + a_{n_k, r} \cdot (D_\sigma \cdot C_{n_k, r})) \geq 0$$

($C \mapsto (D_\sigma \cdot C)$ ist ein stetiges lineares Funktional),

und daher $(D_\sigma \cdot C') = -(D_\sigma \cdot C) \leq 0$.

Andererseits ist $(D_\sigma \cdot C') =$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k, r+1} \cdot (D_\sigma \cdot C_{n_k, r+1}) + \dots + a_{n_k, 2r} \cdot (D_\sigma \cdot C_{n_k, 2r})) \geq 0,$$

Also ist $(D_\sigma \cdot C') = 0$ für alle $\sigma = 1, \dots, r$.

Weil die D_σ eine Basis bilden folgt: $(D \cdot C') = 0$ für alle $D \in A^1(X)$, und damit $C' = 0$. Also ist auch $C = -C' = 0$.

Damit ist der Satz bewiesen.

6.3 Bemerkung: Aus dem Beweis von 6.1 ergibt sich:

X ist genau dann projektiv, wenn je $2r$ Punkte von X in einer projektiv-abschließbaren offenen Teilmenge von X liegen (wobei $r = \dim A^1(X)$).

Wegen $\dim A^1(X) \leq \operatorname{rg} H^2(X, \mathbb{Z})$ (vgl. Beweis von 5.13) folgt:

X ist genau dann projektiv, wenn je $2s$ Punkte von X in einer projektiv-abschließbaren offenen Teilmenge von X liegen (wobei $s = \operatorname{rg} H^2(X, \mathbb{Z})$).

§ 7 Bilder projektiv-algebraischer Räume

Sei X ein reduzierter kompakter komplexer Raum, sei Y projektiv-algebraisch, und sei $\varphi: Y \rightarrow X$ eine surjektive holomorphe Abbildung.

X braucht dann im allgemeinen nicht projektiv zu sein; e.g. ist jedes analytische Schema Bild eines projektiv-algebraischen Raumes.

Immerhin gilt:

7.1 Satz: Es gibt eine eigentliche Modifikation $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ mit projektivem $\bar{X}$.

Ist $\dim X = \dim Y$, und ist Y reduziert und irreduzibel, so kann π so gewählt werden, daß die strikte Transformierte $\varphi_\pi: \bar{X}_\varphi \rightarrow \bar{X}$ von φ unter π (vgl. 1.6) eine endliche holomorphe Abbildung ist.

Der Beweis besteht im wesentlichen im Beweis von zwei Teilaussagen, die wir separat formulieren, weil sie auch später verwendet werden.

Seien V, W komplexe Räume, und sei $\psi: V \rightarrow W$ holomorph. Dann heißt $\text{fmd } \psi := \min \{ \dim_V \psi^{-1}(\psi(v)) : v \in V \}$ Faserminimaldimension von ψ .

Ist V irreduzibel, so ist $\text{fmd } \psi = \min \{ \dim \psi^{-1}(\psi(v)) : v \in V \} = \dim V - \dim \psi(V)$.

7.2 Lemma: Sei Y ein projektiv-algebraischer Raum mit irreduzibler Reduktion, und sei $\varphi: Y \rightarrow X$ eine surjektive holomorphe Abbildung auf den reduzierten kompakten komplexen Raum X .

Dann gibt es zu jeder endlichen Teilmenge N von $\{x \in X : \dim \varphi^{-1}(x) = \text{fmd } \varphi\}$ einen reduzierten und irreduziblen Unterraum Z_N von Y so, daß φ eine über N endliche, surjektive holomorphe Abbildung $\varphi_N: Z_N \rightarrow X$ induziert.

Beweis: Es genügt zu zeigen: Es gibt einen reduzierten und irreduziblen Unterraum Z_1 von Y so, daß φ eine surjektive holomorphe Abbildung $\varphi_1: Z_1 \rightarrow X$ induziert mit der Eigenschaft: Für alle $x \in N$ ist $\dim \varphi_1^{-1}(x) = \text{fmd } \varphi_1 = \max\{0, \text{fmd } \varphi - 1\}$.

Dann folgt die Behauptung durch vollständige Induktion nach $\text{fmd } \varphi$.

Ist $\text{fmd } \varphi = 0$, so setze man $Z_1 := Y_{\text{red}}$.

Andernfalls wähle man einen Hyperebenenschnitt H in Y so, daß H keine irreduzible Komponente von $\varphi^{-1}(N)$ enthält. Für alle $x \in X$ ist $\dim \varphi^{-1}(x) \geq \text{fmd } \varphi > 0$, und daher $\varphi^{-1}(x) \cap H \neq \emptyset$, denn H trifft jede positiv-dimensionale analytische Menge. Also ist $\varphi(H) = X$.

Sei Z_1 eine irreduzible Komponente von H_{red} mit $\varphi(Z_1) = X$, und sei φ_1 die Einschränkung von φ auf Z_1 .

Dann gilt für alle $x \in N$:

$$\begin{aligned} \text{fmd } \varphi &= \dim \varphi^{-1}(x) > \dim \varphi_1^{-1}(x) \geq \text{fmd } \varphi_1 = \dim Z_1 - \dim X = \\ &= \dim Y - 1 - \dim X = \text{fmd } \varphi - 1, \text{ was zu beweisen war.} \end{aligned}$$

7.3 Lemma: Seien V, W irreduzible reduzierte komplexe Räume gleicher Dimension, und sei $\psi: V \rightarrow W$ eine surjektive eigentliche holomorphe Abbildung.

Dann gibt es eine eigentliche Modifikation $\tau: \bar{W} \rightarrow W$ so, daß die strikte Transformierte $\psi_\tau: \bar{W} \rightarrow W$ von ψ unter τ endlich ist.

Beweis (nach [17]): Trivialerweise ist $\text{fmd } \psi = 0$. Es gibt daher eine nirgends dichte analytische Menge B in W , so daß ψ eine n -blättrige unverzweigte Überlagerung $V - \psi^{-1}(B) \rightarrow W - B$ induziert.

Sei $V^{(n)}$ das n -fache symmetrische Produkt von V , und sei $V_W^{(n)} \hookrightarrow V^{(n)}$ das n -fache symmetrisierte Faserprodukt von V über W , d.h. das Bild des n -fachen Faserprodukts V_W^n unter der (endlichen) kanonischen Abbildung $V^n \rightarrow V^{(n)}$.

ψ induziert eine Abbildung $\psi': V' := (V_W^{(n)})_{\text{red}} \rightarrow W$ auf W .

Als Menge ist $V' = \{[(v_1, \dots, v_n)] \in V^{(n)} : \psi(v_\mu) = \psi(v_\nu) \text{ für alle } \mu, \nu = 1, \dots, n\}$.

$C \hookrightarrow V^{(n)}$ sei das Bild der analytischen Menge

$$U = \bigcup_{1 \leq \mu < \nu \leq n} \{(v_1, \dots, v_n) \in V^n : v_\mu = v_\nu\} \text{ unter } V^n \rightarrow V^{(n)}.$$

Nach Definition von B gilt für $U := V' - (\psi'^{-1}(B) \cup C)$:

ψ' definiert eine biholomorphe Abbildung $U \rightarrow W - B$.

$\bar{W} \hookrightarrow V'$ sei diejenige irreduzible Komponente, die U enthält.

Beh.: ψ' definiert eine eigentliche Modifikation $\tau: \bar{W} \rightarrow W$, deren Zentrum in B liegt.

Bew.: Sei $c \in C \cap V'$ mit $\psi'(c) \in \psi'(U)$. Dann liegt c nicht in $\bar{W}$, denn sonst gäbe es eine Folge (u_n) in U , die gegen c konvergiert, und es wäre $\lim \psi'(u_n) = \psi'(c) \in \psi'(U)$. Weil $\psi'|U \rightarrow \psi'(U)$ biholomorph ist, würde folgen: $c \in U$, im Widerspruch zu $c \in C$.

Also ist $\bar{W} \cap C \subset \psi'^{-1}(B)$, d.h. $\tau|_{\bar{W}} - \psi'^{-1}(B) \rightarrow W - B$ ist biholomorph.

Weil W und $\bar{W}$ reduziert und irreduzibel sind, folgt:

$\tau: \bar{W} \rightarrow W$ ist eine eigentliche Modifikation.

Sei $\psi_\tau: \bar{W}_\psi \rightarrow \bar{W}$ die strikte Transformierte von ψ unter τ .

$T := \{(v, [(v_1, \dots, v_n)]) \in V \times_W \bar{W} : \text{es gibt ein } 1 \leq v \leq n \text{ mit } v = v_v\}$

ist analytisch in $V \times_W \bar{W}$.

Mit $U' := (V - \psi^{-1}(B)) \times_W (\bar{W} - \tau^{-1}(B))$ gilt: $\bar{W}_\psi = \text{clos}_{V \times_W \bar{W}}(U')$, und $U' \cap T = U'$, denn T aufgefaßt als Unterraum von $V \times \bar{W}$, ist der Graph der meromorphen Korrespondenz $\tau^{-1} \circ \psi$, und stimmt daher (weil $\tau|_{\bar{W}} - \tau^{-1}(B) \rightarrow W - B$ biholomorph ist) über $V - \psi^{-1}(B)$ mit U' überein.

Also ist $\bar{W} = \text{clos}_{V \times_W \bar{W}}(U') = \text{clos}_{V \times_W \bar{W}}(U' \cap T) = \text{clos}_T(U' \cap T)$ ein abgeschlossener Unterraum von T .

Die Projektion $V \times_W \bar{W} \rightarrow \bar{W}$ vermittelt eine endliche Abbildung $T \rightarrow \bar{W}$ (klar nach Definition von T).

ψ_τ wird ebenfalls durch die Projektion induziert, ist also wegen $\bar{W} \hookrightarrow T$ eine endliche holomorphe Abbildung.

Beweis von Satz 7.1: Ohne Einschränkung sei X irreduzibel, denn ist 7.1 richtig für jede irreduzible Komponente T von X , so erhält man $\bar{X}$ als disjunkte Vereinigung der $\bar{T}$.

Sei Y_1 eine irreduzible Komponente von Y_{red} mit maximaler Faserminimaldimension über X .

Zu $N := \{x\}$, $x \in \{z \in X : \dim \varphi^{-1}(z) = \text{fmd } \varphi\}$ beliebig, wähle man $Z_N \hookrightarrow Y_1$ gemäß 7.2. Man setze dann $V := Z_N$, $W := X$, $\psi := \varphi_N$, und konstruiere $\tau: \bar{W} \rightarrow W$ gemäß 7.3.

$\bar{X} := \bar{W}$ ist dann Unterraum eines symmetrischen Produkts des projektiv-algebraischen Raumes $V = Z_N$, mithin projektiv.

$\pi := \tau$ ist eigentliche Modifikation.

Ist $\dim X = \dim Y$, und ist Y reduziert und irreduzibel, so ist $Z_N = Y_1 = Y$. Nach 7.3 ist daher $\varphi_\pi := \psi_\tau$ eine endliche holomorphe Abbildung.

7.4 Korollar: Unter den Voraussetzungen von 7.1 ist $\bar{X}_\varphi$ projektiv.

Beweis: $\bar{X}_\varphi$ ist Unterraum des projektiv algebraischen $\bar{X} \times_X Y$.

7.5 Korollar: Sei X ein normaler komplexer Raum, sei Y projektiv, und sei $\varphi: Y \rightarrow X$ endlich, surjektiv und holomorph. Dann ist X projektiv.

Beweis: Man konstruiere $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ wie im Beweis von 7.1.

π ist dann gegeben durch die Einschränkung der durch φ induzierten Abbildung $Y^{(n)} \rightarrow X$. Letztere ist endlich, weil φ es ist. Nach 1.6 folgt: π ist biholomorph, also X projektiv.

7.6 Beispiel: Die Voraussetzung "X normal" in 7.5 ist

wesentlich: Es gibt nicht-projektive kompakte komplexe Räume mit projektiver Normalisierung.

Man betrachte im $\mathbb{P}_3$ die Kurve C_1 , gegeben durch die Gleichungen $z_2 = 0$, $z_3 = 0$, und die Kurve C_2 , gegeben durch die Gleichungen $z_0 = 0$, $z_3 \cdot z_2 = z_1^2$.

C_1 bzw. C_2 ist vermöge $\mathbb{P}_1 \ni w_0:w_1 \xrightarrow{\varphi} w_0:w_1:0:0$, bzw.

$\mathbb{P}_1 \ni w_0:w_1 \xrightarrow{\psi} 0:w_0:w_1:w_1^2$ isomorph zu $\mathbb{P}_1$; C_1 und C_2 sind disjunkt.

Es ist $\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$, und $\psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$. Also gilt für die Schnittzahlen $(H \cdot C_1)$, $(H \cdot C_2)$ einer Hyperebene H im $\mathbb{P}_3$ mit den Kurven C_1, C_2 : $(H \cdot C_1) = 1$, $(H \cdot C_2) = 2$.

X entstehe aus $\mathbb{P}_3$ durch Identifikation von C_1 und C_2 vermöge $\psi \circ \varphi^{-1}$. Die Quotientenabbildung $\tau: \mathbb{P}_3 \rightarrow X$ ist die Normalisierung von X .

Annahme: X ist projektiv.

Es gibt dann einen ample Divisor D auf X . Sei $C := \tau(C_1) = \tau(C_2)$. τ definiert biholomorphe Abbildungen $C_1 \rightarrow C$, $C_2 \rightarrow C$; daher ist $(\tau^* D \cdot C_1) = (D \cdot C) = (\tau^* D \cdot C_2)$.

Nun ist $\text{Pic}(\mathbb{P}_3) \cong \mathbb{Z}$ (Beweis siehe etwa [19]); es gibt deshalb ein $n \in \mathbb{Z}$ so, daß $\tau^* D = nH$, H eine Hyperebene in $\mathbb{P}_3$.

Also ist $2n = (nH \cdot C_2) = (D \cdot C) = (nH \cdot C_1) = n$, und damit $(D \cdot C) = 0$ im Widerspruch zur Definition von D .

Unter Zusatzvoraussetzungen an X läßt sich 7.5 folgendermaßen verallgemeinern:

7.7 Satz: Sei X ein zusammenhängender normaler kompakter komplexer Raum mit diskreter Singularitätenmenge. Es gebe einen projektiv-algebraischen Raum Y und eine surjektive holomorphe Abbildung $\varphi: Y \rightarrow X$ mit konstanter Faserdimension. Dann ist X projektiv.

Beweis: Wir zeigen: Jede endliche Teilmenge von X liegt in einer projektiv-abschließbaren offenen Teilmenge von X . Dann ist X nach 6.1 projektiv.

Ohne Einschränkung sei Y reduziert und irreduzibel (andernfalls ersetze man Y durch eine irreduzible Komponente von Y_{red} , die mit maximaler Faserminimaldimension über X liegt; die Faserdimension der durch φ induzierten Abbildung ist dann wieder konstant).

Sei $N' \subset X$ endlich. Dann ist auch $N := N' \cup \{\text{Singularitäten von } X\}$ endlich.

Zu N konstruiere man $\varphi_N: Z_N \rightarrow X$ gemäß 7.2. Zu $V := Z_N$, $W := X$, $\psi := \varphi_N$ gibt es ein $\tau: \bar{W} \rightarrow W$ gemäß 7.3. $\bar{X} := \bar{W}$ liegt in einem symmetrischen Produkt des projektiven Z_N , ist also projektiv. $\pi := \tau$ ist gegeben durch die Einschränkung der durch induzierten Abbildung $Z_N^{(n)} \rightarrow X$ (vgl. Beweis von 7.3). Notwendig ist daher π endlich über N , weil φ_N es ist. Weil X normal ist, folgt nach 1.6: π ist biholomorph über N , d.h. Das Zentrum $Z(\pi)$ von π liegt in $X - N$.

Sei H ein Hyperebenenschnitt in $\bar{X}$, der (die endliche Menge) $\pi^{-1}(N)$ nicht trifft, und der keine irreduzible Komponente

der Ausnahmemenge $A(\pi)$ von π enthält. Notwendig hat dann $\pi(H)$ in jedem $x \in X$ die Kodimension 1 und trifft nach Definition von H die Singularitätenmenge von X nicht.

Nach 1.5 gibt es daher eine Hyperfläche H_1 in X mit Träger $|\pi(H)|$. Dann ist auch $\pi^{-1}(H_1)$ Hyperfläche in $\bar{X}$, denn mit X ist auch $\bar{X}$ reduziert und irreduzibel. Weil H ampel ist, gibt es nach 3.8 ein $n \in \mathbb{N} + 1$ so, daß $nH + \pi^{-1}(H_1)$ ampel ist. Wegen $|H| \subset |\pi^{-1}(H_1)| \subset |nH + \pi^{-1}(H_1)| \subset |\pi^{-1}(H_1)|$ folgt: $|\pi^{-1}(H_1)|$ ist Träger eines ampel Divisors. (*)

Weil X normal ist, ist $\dim \pi^{-1}(x) > 0$ für alle $x \in Z(\pi)$. Also ist $\pi^{-1}(x) \cap H \neq \emptyset$ für alle $x \in Z(\pi)$, denn H trifft jede analytische Menge positiver Dimension in $\bar{X}$. Somit ist $Z(\pi) \subset H_1$. Zusammen mit (*) folgt: $U := X - H_1$ ist projektiv-abschließbar. Ferner gilt wegen $Z(\pi) \subset X - N$: $N \cap H_1 \subset N \cap (H_1 - Z(\pi)) = \pi(\pi^{-1}(N) \cap \pi^{-1}(H_1 - Z(\pi))) = \pi(\pi^{-1}(N) \cap H) = \emptyset$, d.h.: $N \subset U$.

Also liegt auch die vorgegebene endliche Menge N' in der projektiv-abschließbaren offenen Menge U .

7.8 Korollar: Sei X ein zusammenhängender normaler kompakter komplexer Raum der Dimension 2. Sei Y projektiv, und sei $\varphi: Y \rightarrow X$ eine surjektive holomorphe Abbildung mit konstanter Faserdimension. Dann ist X projektiv.

Beweis: Die Singularitätenmenge von X hat Kodimension 2, weil X normal ist, und ist somit diskret.

Also sind die Voraussetzungen von 7.7 erfüllt.

§ 8 Charakterisierung von Mořsezon - Räumen

Nach einem Satz von Siegel ist für einen reduzierten und irreduziblen kompakten komplexen Raum X der Transzendenzgrad $a(X) := \text{trdeg}_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_X(X)$ des Körpers der meromorphen Funktionen auf X höchstens gleich der Dimension von X . Für projektiv-algebraisches X ist stets $a(X) = \dim X$. Trivialerweise gilt daher: Ist X bimeromorph äquivalent zu einem projektiv-algebraischen reduzierten und irreduziblen Raum, so ist $a(X) = \dim X$. Die Untersuchung komplexer Räume mit dieser Eigenschaft führt zum Begriff des Mořsezon-Raums. In diesem Paragraphen werden Mořsezon-Räume in Analogie zu einem Projektivitätskriterium von Grauert charakterisiert als exzeptionelle Nullschnitte in Kegelräumen.

Sei X ein reduzierter kompakter komplexer Raum.

8.1 Definition: X heißt Mořsezon-Raum (oder Mořsezonsch), wenn für jede irreduzible Komponente T von X der Transzendenzgrad $a(T)$ des Körpers der meromorphen Funktionen auf T gleich der Dimension von T ist.

8.2 Bemerkungen: a) Jedes analytische Schema ist ein Mořsezon-Raum.

b) Nicht jeder Mořsezon-Raum ist projektiv (vgl. 4.2d).

c) Ist X Mořsezonsch, so ist X bimeromorph äquivalent zu einem projektiv-algebraischen Raum der Dimension $\dim X$:

Eine Transzendenzbasis $\{f_1, \dots, f_n\}$ von $\mathbb{M}_X(X)$ induziert eine meromorphe Korrespondenz $F: X \xleftarrow{\hat{F}} Z \xrightarrow{\hat{F}} \mathbb{P}_1^n$ mit surjektivem $\hat{F}$.

Für die Stein-Faktorisierung $Z \xrightarrow{\tau} S(\hat{F}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}_1^n$ gilt daher:

ψ ist endlich, und τ ist eine eigentliche Modifikation.

Nach 3.6 ist $S(\hat{F})$ projektiv. $X \xleftarrow{\hat{F}} Z \xrightarrow{\tau} S(\hat{F})$ ist somit eine bimeromorphe Korrespondenz mit projektivem $S(\hat{F})$.

d) Sind X und Y Mořsezonsch, so auch $X \times Y$: Ohne Einschränkung seien X und Y irreduzibel (die irreduziblen Komponenten von $X \times Y$ sind Produkte der irreduziblen Komponenten von X und Y). Dann ist $a(X \times Y) \leq \dim X \times Y = \dim X + \dim Y = a(X) + a(Y) \leq a(X \times Y)$.

e) Ist $\varphi: X \rightarrow Y$ eine surjektive holomorphe Abbildung zwischen reduzierten und irreduziblen kompakten komplexen Räumen, so ist $a(X) \geq a(Y)$. Insbesondere gilt: Ist $\dim X = \dim Y$, und ist Y Mořsezonsch, so auch X .

Die naheliegende Vermutung, jeder Mořsezon-Raum sei ein analytisches Schema, ist falsch:

8.3 Beispiele: a) Sei X eine zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 3 , und sei C eine irreduzible Kurve in X mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $a \in C$ und eine offene Umgebung U von a in X so, daß $C - \{a\}$ singularitätenfrei ist, und $U \cap C$ Vereinigung singularitätenfreier Kurven C', C'' ist, die sich in a transversal schneiden.

Sei $\pi_1: U_1 \rightarrow U$ der σ -Prozeß bezüglich C' , und sei C_1' die strikte Transformierte von C' unter π_1 .

U_1 ist Mannigfaltigkeit; $\pi_1^{-1}(C')$ und die strikte Transformierte C_1' von C' unter π_1 sind singularitätenfrei und schneiden sich transversal in genau einem Punkt $b \in U_1$.

Mit $n := \dim X$ gilt: $\pi_1^{-1}(a) \cong \mathbb{P}_{n-2}$. Es gibt daher eine lineare Einbettung $\mathbb{P}_1 \rightarrow \pi_1^{-1}(a)$ so, daß das Bild B_1 den Punkt b enthält.

Für den durch $\pi_1^{-1}(C')$ definierten Divisor D_1' auf U_1 gilt nach 2.6: Die Einschränkung $(\mathcal{O}_{U_1}(D_1'))_{B_1}$ ist isomorph zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$.

C_1' definiert einen Divisor D_1'' auf B_1 , und es gilt, weil sich C_1' und B_1 in b transversal schneiden: $\mathcal{O}_{B_1}(D_1'') \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$.

Sei $\pi_2: U_2 \rightarrow U_1$ der σ -Prozeß bezüglich C_1' , und sei B_2 die strikte Transformierte von B_1 unter π_2 . π_2 induziert eine biholomorphe Abbildung $B_2 \rightarrow B_1$.

Für den durch $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(C)$ definierten Divisor D_2 auf U_2 gilt: $D_2 = \pi_2^{-1}(C_1'') + \pi_2^{-1}(D_1')$. Notwendig folgt: Die Einschränkung $\mathcal{O}_{B_2}(D_2)$ von $\mathcal{O}_{U_2}(D_2)$ auf B_2 ist zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$ isomorph, also trivial. (*)

Die Einschränkung $\pi_1 \circ \pi_2|_{U_2 - (\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(a)} \rightarrow U - \{a\}$ ist der σ -Prozeß bezüglich $C - \{a\}$. Daher lassen sich $\pi_1 \circ \pi_2$ und der σ -Prozeß $\pi_3: U_3 \rightarrow X - \{a\}$ bezüglich $C - \{a\}$ zu einer eigentlichen Modifikation $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ so verheften, daß gilt: $\hat{X}$ ist kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\pi|_{\hat{X} - \pi^{-1}(a)} \rightarrow X - \{a\}$ ist isomorph zu π_3 , und $\pi|_{\pi^{-1}(U)} \rightarrow U$ ist isomorph zu $\pi_1 \circ \pi_2$.

Beh.: $\hat{X}$ ist kein analytisches Schema.

Bew.: Annahme: $\hat{X}$ ist ein analytisches Schema.

Dann sind insbesondere Schnittzahlen von Divisoren mit Kurven definiert. Wegen (*) gilt für den durch $\pi^{-1}(C)$ bestimmten Divisor E auf $\hat{X}$: $(E \cdot B_2) = 0$.

Sei H eine beliebige Hyperfläche auf $\hat{X}$. Durch Zerlegung in ihre irreduziblen Komponenten folgt, weil E irreduzibel ist, und weil X und $\hat{X}$ Mannigfaltigkeiten sind: H ist von der Form $mE + \pi^{-1}(D)$, $m \in \mathbb{N}$, D ein effektiver Divisor auf X . Also ist $(H \cdot B_2) = m(E \cdot B_2) + (\pi^{-1}(D) \cdot B_2) = (\pi^{-1}(D) \cdot B_2) = 0$, denn $\mathcal{O}_{\hat{X}}(\pi^{-1}(D)) = \pi^* \mathcal{O}_X(D)$ ist trivial längs B_2 , weil B_2 in einer Faser von π liegt. (**)

Andererseits gibt es, wenn $\hat{X}$ ein analytisches Schema ist, eine schwach projektiv-abschließbare offene Menge V in $\hat{X}$, die die irreduzible Kurve B_2 trifft und nicht enthält. Weil $\hat{X}$ Mannigfaltigkeit ist, trägt $\hat{X} - V$ die Struktur einer Hyperfläche H , die auf B_2 einen nichttrivialen effektiven Divisor H' induziert. Nach 3.14 ist H' ampel auf B_2 , und daher $(H \cdot B_2)_{\hat{X}} = (H')_{B_2} > 0$, im Widerspruch zu (**).

b) Nicht jede Mořsezon-Mannigfaltigkeit ist ein analytisches Schema (vgl. [25]): Sei $X := \mathbb{P}_3$, und sei $C \hookrightarrow \mathbb{P}_3$ die durch $z_3 = 0$, $z_0 z_1^2 + z_1^3 - z_0 z_2^2 = 0$ definierte Kurve (siehe Abb. 1). X und C erfüllen die Voraussetzungen von (a). Weil π eigentliche Modifikation ist, ist $\hat{X}$ Mořsezon-Mannigfaltigkeit, aber kein analytisches Schema.

c) Nicht jede Mannigfaltigkeit, die vermöge einer Punktmodifikation über einer projektiven Mannigfaltigkeit liegt, ist projektiv. Insbesondere ist nicht jede Punktmodifika-

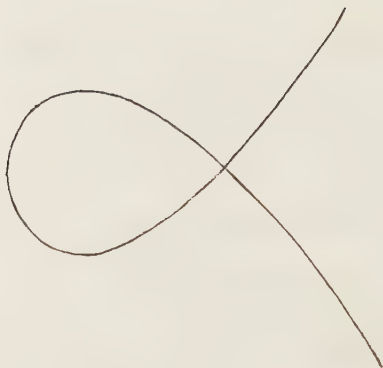


Abb. 1

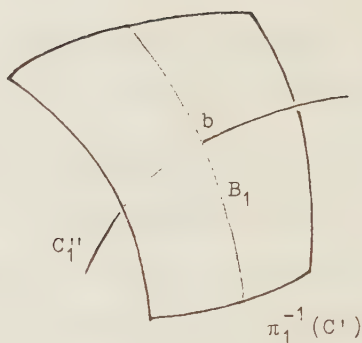


Abb. 2 : in U_1

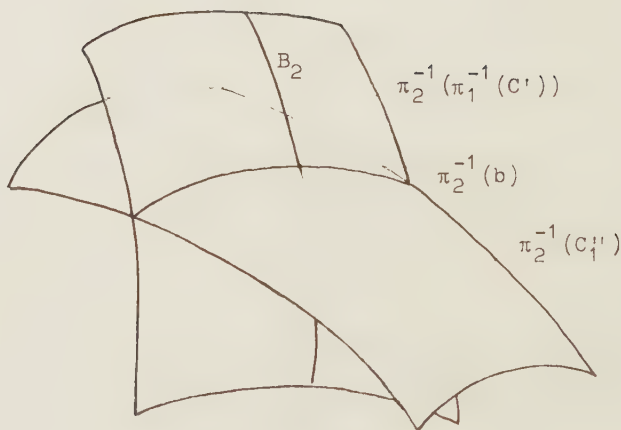


Abb. 3 : in U_2

tion zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten eine monoidale Transformation: Sei $\tau: X \rightarrow \mathbb{P}_4$ der σ -Prozeß bezüglich eines Punktes $p \in \mathbb{P}_4$. Dann ist $\tau^{-1}(p) \cong \mathbb{P}_3$. Sei $C \hookrightarrow \tau^{-1}(p) \hookrightarrow X$ wie in (b) und sei dazu $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ wie in (a) konstruiert. $\hat{X}$ ist Mannigfaltigkeit, und $\tau \circ \pi$ ist eigentliche Modifikation

mit einpunktigem Zentrum und. $\hat{X}$ ist nach (a) kein analytisches Schema, also nicht projektiv.

Es gibt keine zweidimensionalen Beispiele dieser Art: Nach Hopf [14] ist jede Punktmodifikation $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ zwischen zweidimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten ein iterierter σ -Prozeß, also nach Hironaka-Rossi [13] eine monoidale Transformation. Insbesondere ist mit X auch $\hat{X}$ projektiv. In Verallgemeinerung des Satzes von Hopf hat Kuhlmann [16] bewiesen: Jede eigentliche Modifikation zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten mit nichtsingulärem Zentrum und irreduzibler Ausnahmемenge ist eine monoidale Transformation. Wie (8.3 c) zeigt, ist die Irreduzibilität der Ausnahmемenge dabei wesentlich.

Aus dem Satz von Hopf folgt außerdem, daß jede zweidimensionale Mořsezon-Mannigfaltigkeit projektiv, also insbesondere ein analytisches Schema ist: In einer bimeromorphen Korrespondenz $X \xleftarrow{\tilde{f}} Z' \xrightarrow{\hat{f}} Z \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ kann man Z und Z' (evtl. nach Singularitätenauflösung) als Mannigfaltigkeiten annehmen. Dann ist $\hat{f}$ monoidale Transformation, Z' also projektiv, und nach 3.18 folgt: X projektiv.

Wie das in (3.19 b) zitierte Beispiel von Grauert zeigt, ist jedoch nicht jeder zweidimensionale Mořsezon-Raum projektiv. Nach 3.17 ist dieser Raum auch kein analytisches Schema.

Nach 7.1 ist das Bild eines projektiv-algebraischen Raums unter einer holomorphen Abbildung ein Mořezon-Raum. In Verallgemeinerung dessen gilt:

8.4 Satz (Mořezon [18]): Sei $\varphi: X \rightarrow Y$ eine surjektive holomorphe Abbildung des Mořezon-Raums X auf den reduzierten kompakten komplexen Raum Y .

Dann ist Y Mořezonsch.

Wir beweisen erst einen Spezialfall, auf den wir dann den allgemeinen Fall zuröckföhren.

8.5 Lemma: Sei $\varphi: X \rightarrow Y$ wie in 8.4, und sei zusätzlich Y irreduzibel von der Dimension $\dim X$.

Dann ist Y Mořezonsch.

Beweis: Es genügt, das Lemma für irreduzibles X zu zeigen.

Für eine bimeromorphe Korrespondenz $X \xleftarrow{\check{f}} Z' \xrightarrow{\hat{f}} Z \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ ist dann auch der Graph Z' irreduzibel, und $\varphi \circ \check{f}$ hat wegen $\dim Y = \dim X = \dim Z'$ Faserminimaldimension 0. Es gibt daher eine nirgends dichte analytische Menge A in Y so, daß $\varphi \circ f$ eine n -blättrige Überlagerung $Z' - (\varphi \circ \check{f})^{-1}(A) \rightarrow Y - A$ induziert.

Man konstruiere jetzt zu $V := Z'$, $W := X$ und $\psi := \varphi \circ \check{f}$ die eigentliche Modifikation $\tau: \bar{W} \rightarrow W$ wie im Beweis von 7.3.

Dann ist $\bar{Y} := \bar{W}$ abgeschlossener Unterraum des n -fachen symmetrischen Produkts $Z'^{(n)}$ von Z' , $\hat{f}$ induziert eine eigentliche Modifikation $\hat{f}^{(n)}: Z'^{(n)} \rightarrow Z^{(n)}$ mit Ausnahmemeenge $A(\hat{f}^{(n)}) = \{[(z'_1, \dots, z'_n)] : \text{es gibt ein } 1 \leq v \leq n \text{ mit } z'_v \in A(\hat{f})\}$.

Wir zeigen: $\hat{f}^{(n)}$ induziert eine eigentliche Modifikation $\bar{Y} \rightarrow \hat{f}^{(n)}(\bar{Y})$. Dann folgt, weil $\hat{f}^{(n)}(\bar{Y})$ als abgeschlossener Unterraum des projektiv-algebraischen Raumes $Z^{(n)}$ projektiv ist: $\bar{Y}$ ist Mořsezonsch. Damit ist dann auch Y Mořsezonsch, weil τ eine eigentliche Modifikation ist.

Weil $\bar{Y}$ reduziert und irreduzibel ist, genügt es zu zeigen: $\bar{Y}$ liegt nicht in der Ausnahmemenge von $\hat{f}^{(n)}$.

Jedes Element aus $\bar{Y}$ ist von der Form $[(z'_1, \dots, z'_n)] \in Z'^{(n)}$, mit $\varphi(\check{f}(z'_\mu)) = \varphi(\check{f}(z'_\nu))$ für alle $\mu, \nu = 1, \dots, n$. $\tau: \bar{Y} \rightarrow Y$ ist gegeben durch $[(z'_1, \dots, z'_n)] \mapsto \varphi(\check{f}(z'_1)) \quad (=\dots=\varphi(\check{f}(z'_n)))$.

Wäre $\bar{Y} \subset A(\hat{f}^{(n)})$, so wäre daher $\varphi(\check{f}(\bar{Y})) \subset \varphi(\check{f}(A(\hat{f})))$. Notwendig wäre dann $\text{fmd}(\varphi \circ \check{f}) > 0$, ein Widerspruch.

Analog zu 7.2 gilt folgendes

8.6 Lemma: Seien X, Y, φ wie in 8.4, und sei Y irreduzibel. Dann gibt es einen reduzierten und irreduziblen Mořsezon-Raum $X_1 \hookrightarrow X$ der Dimension $\dim Y$, der durch φ surjektiv auf Y abgebildet wird.

Beweis: Ohne Einschränkung sei X irreduzibel.

Es genügt zu zeigen: X enthält einen reduzierten irreduziblen Mořsezon-Unterraum X' so, daß φ eine surjektive holomorphe Abbildung $\varphi': X' \rightarrow Y$ mit Faserminimaldimension $\text{fmd } \varphi' = \max \{0, \text{fmd } \varphi - 1\}$ induziert. Dann folgt die Behauptung durch vollständige Induktion nach $\text{fmd } \varphi$.

Ist $\text{fmd } \varphi = 0$, so setze man $X' := X$.

Sei jetzt $\text{fmd } \varphi > 0$.

Sei $X \xrightarrow{\check{f}} Z' \xrightarrow{\hat{f}} Z \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ eine bimeromorphe Korrespondenz, und seien $A(\check{f}), A(\hat{f}) \hookrightarrow Z'$ die Ausnahmemengen von $\check{f}$ und $\hat{f}$.

$H \hookrightarrow Z$ sei ein Hyperebenenschnitt, der keine irreduzible Komponente von $\hat{f}(A(\check{f}) \cup A(\hat{f}))$ enthält. Dann folgt aus Dimensionsgründen: $A(\check{f}) \cup A(\hat{f})$ enthält keine irreduzible Komponente von $\hat{f}^{-1}(H)$. (*)

$\hat{f}^{-1}(H)$ trifft jede zusammenhängende analytische Menge positiver Dimension, die nicht in $A(\hat{f})$ liegt: Für eine solche analytische Menge C ist $\dim \hat{f}(C) > 0$ und daher (H Hyper-ebenenschnitt) $H \cap \hat{f}(C) \neq \emptyset$. Also ist $C \cap \hat{f}^{-1}(H) \neq \emptyset$. (**)

Beh.: $Y = \varphi(\check{f}(\hat{f}^{-1}(H)))$

Bew.: $\psi := \varphi \circ \check{f}$. Ist $y \in Y$ mit $\psi^{-1}(y) \cap \hat{f}^{-1}(H) = \emptyset$, so liegt nach (**) jede positiv-dimensionale Zusammenhangskomponente von $\psi^{-1}(y)$ in $A(\hat{f})$. Die Menge U aller solchen y ist offen, und die Einschränkung $\psi|_{\psi^{-1}(U)} : \psi^{-1}(U) \rightarrow U$ hat diskrete Fasern. Wäre $U \neq \emptyset$, so wäre $\dim Y = \dim U = \dim \psi^{-1}(U) - A(\hat{f}) = \dim Z' = \dim X$, im Widerspruch zu $\text{fmd } \varphi > 0$.

Also: $\psi^{-1}(y) \cap \hat{f}^{-1}(H) \neq \emptyset$ für alle $y \in Y$, d.h. $\psi(\hat{f}^{-1}(H)) = Y$.

Sei Z_1 eine irreduzible Komponente von $(\hat{f}^{-1}(H))_{\text{red}}$, die durch ψ surjektiv auf Y abgebildet wird. Wegen (*) definiert $\hat{f}$ eine eigentliche Modifikation $Z_1 \rightarrow \hat{f}(Z_1)$. Also ist Z_1 Mořsezonsch, weil $\hat{f}(Z_1)$ projektiv ist.

$\check{f}$ definiert, ebenfalls wegen (*), eine eigentliche Modifikation $Z_1 \rightarrow \check{f}(Z_1)$; $X' := \check{f}(Z_1)$ ist somit ein reduzierter irreduzibler Mořsezon-Unterraum von X , der wegen

$\psi(Z'_1) = \varphi(X') = Y$ surjektiv auf Y abgebildet wird.

Für die Einschränkung φ' von φ auf X' gilt: $\text{fmd } \varphi' =$

$$\dim X' - \dim Y = \dim Z'_1 - \dim Y = \dim Z' - 1 - \dim Y =$$

$$\dim X - 1 - \dim Y = \text{fmd } \varphi - 1.$$

Beweis von 8.4: Ohne Einschränkung seien X und Y irreduzibel. Man wähle $X_1 \hookrightarrow X$ gemäß 8.6. Dann ist Y nach 8.5 Mořsezonsch.

Ist in der Situation von 8.4 X projektiv, so folgt nach 8.4 (oder auch nach 7.1): Jeder Unterraum von Y ist Mořsezonsch.

8.7 Lemma von Chow: Zu jedem Mořsezon-Raum X gibt es ein projektives $\bar{X}$ und eine eigentliche Modifikation $\pi: \bar{X} \rightarrow X$.

Nach der Bemerkung oben ist somit jeder Unterraum eines Mořsezon-Raums Mořsezonsch.

8.8 Lemma von Chow-Hironaka [12]: Seien V, W komplexe Räume, und sei $\alpha: V \rightarrow W$ eine eigentliche Modifikation.

Dann gibt es monoidale Transformationen $\pi_v: W_v \rightarrow W_{v-1}$,

$v = 1, \dots, n$, $W_0 := W$, und eine holomorphe Abbildung $\chi: W_n \rightarrow V$

mit $\alpha \circ \chi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$.

Aus 8.8 ergibt sich sofort das Lemma von Chow in der Formulierung von 8.7:

Sei $X \xleftarrow{\tilde{f}} Z' \xrightarrow{\hat{f}} Z \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ eine bimeromorphe Korrespondenz.

Zu $V := Z'$, $W := Z$, $\alpha := \hat{f}$ gibt es $\pi_v: W_v \rightarrow W_{v-1}$, $v = 1, \dots, n$,
und $\chi: W_n \rightarrow V$ gemäß 8.8. Trivialerweise ist χ , und damit
auch $\pi := \tilde{f} \circ \chi$ eine eigentliche Modifikation. $\bar{X} := W_n$ ist nach
3.21 projektiv.

Sei $X \hookrightarrow \mathbb{P}_N$, und sei $G_X(-1) \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^{N+1}$ die Einschränkung
des tautologischen Geradenbündels $G_{\mathbb{P}_N}(-1)$ auf X (vgl. 1.12).
Dann ist X , aufgefaßt als Nullschnitt in $G_X(-1)$, exzeptionell in $G_X(-1)$:

$G_X(-1)$ ist als Menge von der Form $\{(x, w) \in X \times \mathbb{C}^{N+1} : w \in x\}$;
für $(x, w) \in G_X(-1) - X$ ist daher $x = (w_0 : \dots : w_N)$, d.h. x ist
durch w eindeutig bestimmt. Die Projektion
 $\text{pr}_2: X \times \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ induziert daher eine eigentliche holomorphe
Abbildung $p: G_X(-1) \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$, die auf $G_X(-1) - X$ injektiv
ist, und die X auf $\{0\}$ abbildet.

Also ist $G_X(-1)$ holomorph konvex, und jede zusammenhängende
kompakte analytische Menge positiver Dimension in $G_X(-1)$
liegt in X .

Nach 1.7 ist X exzeptionell in $G_X(-1)$.

8.9 Definition: Ein kompakter komplexer Raum X heißt exzeptionell einbettbar, wenn es einen komplexen Raum V und eine
Einbettung $j: X \rightarrow V$ so gibt, daß $j(X)$ exzeptionell in V ist.

Jeder projektiv-algebraische Raum ist also exzeptionell
einbettbar. Mit Hilfe von 8.8 folgt:

8.10 Satz: Ein reduzierter kompakter komplexer Raum ist genau dann Moisëzonsch, wenn er exzeptionell einbettbar ist.

Beweis: Ist X Moisëzonsch, so gibt es nach 8.7 eine eigentliche Modifikation $\pi: \bar{X} \rightarrow X$, $\bar{X} \rightarrow \mathbb{P}_N$.

$\Pi := \pi \times \text{id}: \bar{X} \times \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow X \times \mathbb{C}^{N+1}$ ist eigentlich, also ist das analytische Bild $V := \Pi(G_{\bar{X}}(-1))$ definiert (vgl. Seite 112). Für die durch die Projektionen induzierten Abbildungen $p: V \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ und $p': G_{\bar{X}}(-1) \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ gilt: $p \circ \Pi = p'$. Notwendig ist daher X exzeptionell in V .

Umkehrung (nach einer Mitteilung von G. Fischer): Sei X ein kompakter Unterraum eines komplexen Raumes V , und sei $\alpha: V \rightarrow W$ eine eigentliche Modifikation mit einpunktigem Zentrum und Ausnahmемenge X .

Nach 8.8 gibt es monoidale Transformationen $\pi_v: W_v \rightarrow W_{v-1}$, $v = 1, \dots, n$, und eine holomorphe Abbildung $\chi: W_n \rightarrow V$ mit $\alpha \circ \chi = \pi_1 \dots \pi_n =: \tau$. Die Fasern von τ sind projektiv; also ist auch $\chi^{-1}(X)$ projektiv.

Nach 8.4 (oder 7.1) ist $X = \chi(\chi^{-1}(X))$ Moisëzonsch.

Nach Grauert [6] ist ein kompakter komplexer Raum X genau dann projektiv, wenn auf X ein Vektorbündel mit exzeptioneller Nullschnittfläche existiert.

Wir beweisen nun eine analoge Charakterisierung für Moisëzon-Räume. Dazu verwenden wir einen Spezialfall des Satzes von Grauert (siehe auch Prill [20]):

Ein kompakter komplexer Raum X ist genau dann projektiv, wenn auf X ein Geradenbündel mit exzeptioneller Nullschnittfläche existiert.

Sei $L \rightarrow X$ ein linearer Faserraum vom Rang $r \geq 1$ auf dem reduzierten kompakten komplexen Raum X . Nach 1.8 ist dann $S(L) := \{x \in X : L \text{ ist kein Vektorbündel in } x\} = \{x \in X : \dim L_x > r\}$ analytisch dünn in X . Daher ist X Unterraum von $C(L) := \text{clos}_L(L \setminus (X - S(L)))$. $C(L)$ ist ein Kegelraum über X (vgl. [20]).

8.11 Definition: L hat exzeptionelle Nullschnittfläche :
 $\Leftrightarrow X$ ist exzeptionell in $C(L)$.

Ist L ein Vektorbündel, so ist $C(L) = L$, und 8.11 liefert dann die übliche Definition des Begriffs "exzeptionelle Nullschnittfläche".

8.12 Satz: Für einen reduzierten kompakten komplexen Raum X sind äquivalent:

- (i) X ist Moisézon-Raum.
- (ii) Auf X existiert ein linearer Faserraum vom Rang ≥ 1 mit exzeptioneller Nullschnittfläche.

Beweis: "(ii) $\Rightarrow$ (i)" ist zwar schon mit 8.10 erledigt, läßt sich jedoch auch ohne Verwendung des Lemmas von Chow beweisen:

Ist $L \rightarrow X$ ein linearer Faserraum mit exzeptioneller Nullschnittfläche, so hat auch die Einschränkung von L auf jede irreduzible Komponente exzeptionelle Nullschnittfläche. X kann daher irreduzibel angenommen werden.

Es gibt einen kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ mit $L = L(\mathfrak{F})$.

Seien $p_{1,\mathfrak{F}}: \mathbb{P}(\mathfrak{F}) \rightarrow X$ und $\mathfrak{X}_{1,\mathfrak{F}}$ gemäß 2.1.

Für $P := \text{clos}_{\mathbb{P}(\mathfrak{F})}(\mathbb{P}(\mathfrak{F}) - p_{1,\mathfrak{F}}^{-1}(S(L)))$ bezeichne p die durch $p_{1,\mathfrak{F}}$ induzierte holomorphe Abbildung $P \rightarrow X$. p ist surjektiv und eigentlich.

$\mathfrak{X} := (\mathfrak{X}_{1,\mathfrak{F}})_P$ ist ein lokal freier Quotient vom Rang 1 von $p^*\mathfrak{F}$.

Wir zeigen: P ist exzeptionell in $T := L(\mathfrak{X})$.

Dann ist P nach dem Grauert'schen Satz projektiv, und nach 8.4 (oder 7.1) folgt: X ist Mořsezonsch.

Lokal, d.h. auf geeigneten offenen Teilmengen U von X , gibt es exakte Sequenzen $\mathcal{O}_X^m|U \rightarrow \mathcal{O}_X^n|U \rightarrow \mathfrak{F}|U \rightarrow 0$. Es ist $p^{-1}(U) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{F}|U) \hookrightarrow U \times \mathbb{P}_{n-1}$, und $\mathfrak{X}|p^{-1}(U) = \text{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{n-1}}(1)$ (vgl. 2.6); dabei sei $\text{pr}_2: U \times \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ die Projektion.

Als Menge ist $T_U := T|p^{-1}(U) \subset \{(x, g, w) \in U \times \mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{C}^n : g \in L_x, w \in g\}$.

Sei Φ die durch die Komposition $T \hookrightarrow p^*L \rightarrow L$ gegebene holomorphe Abbildung.

Beh.: $\Phi|(T_U - P)$ ist injektiv.

Bew.: $\Phi|T_U$ ist gegeben durch $(x, g, w) \rightarrow (x, w)$.

Seien $(x, g, w), (x', g', w') \in T_U - P$ mit $\Phi(x, g, w) = \Phi(x', g', w')$.

Dann ist $x = x'$ und $w = w'$. Nach Voraussetzung ist $w \neq 0 \neq w'$, und deshalb $g = (w_1 : \dots : w_n) = (w'_1 : \dots : w'_n) = g'$

Weil X eine endliche Überdeckung aus solchen offenen Mengen Mengen U besitzt, folgt: $\Phi|T - P$ ist endlich. (*)

Beh.: $\Phi(T) \subset C(L)$.

Bew.: Nach Konstruktion von P ist $p^{-1}(S(L))$ analytisch dünn in P . Deshalb, und weil T ein Geradenbündel ist, folgt:

Die Einschränkung $(T)_P^{-1}(S(L))$ ist analytisch dünn in T ; daher ist $T = \text{clos}_T(T|P - p^{-1}(S(L)))$.

Also ist $\Phi(T) = \Phi(\text{clos}_T(T|P - p^{-1}(S(L)))) = \text{clos}_L(\Phi(T|P - p^{-1}(S(L)))) \hookrightarrow \text{clos}_L(L|X - S(L)) = C(L)$.

Φ definiert somit eine holomorphe Abbildung $T \rightarrow C(L)$, die wir wieder mit Φ bezeichnen.

Sei $\kappa: C(L) \rightarrow W$ eine eigentliche Modifikation mit einpunktigem Zentrum $\{w_0\}$, und Ausnahmемenge X . Wegen (*) induziert dann $\kappa \circ \Phi$ eine endliche holomorphe Abbildung $T - P \rightarrow W - \{w_0\}$, und es ist $\kappa(\Phi(P)) \subset \kappa(X) = \{w_0\}$.

Für die Stein-Faktorisierung $T \xrightarrow{\alpha} S(\kappa \circ \Phi) \rightarrow W$ folgt daher: α ist eine eigentliche Modifikation mit einpunktigem Zentrum und Ausnahmемenge P .

Die Nullschnittfläche des Geradenbündels T auf P ist somit exzeptionell. Also ist X als Bild des projektiv-algebraischen Raumes P Mořsezonsch.

(i) $\rightarrow$ (ii): Ist X Mořsezonsch, so gibt es nach 8.7 ein $\bar{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ und eine eigentliche Modifikation $\pi: \bar{X} \rightarrow X$.

Sei $G := G_{\overline{X}}(-1) \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^{N+1}$ die Einschränkung des tautologischen Geradenbündels $G_{\mathbb{P}^N}(-1)$ auf $\overline{X}$.

Wie im Beweis von 8.10 gezeigt wurde, ist X exzeptionell in $V := \Pi(G_{\overline{X}}(-1))$, wobei $\Pi := \pi \times \text{id}: \overline{X} \times \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow X \times \mathbb{C}^{N+1}$.

Wir zeigen: Es gibt einen linearen Faserraum L vom Rang 1 auf X so, daß $C(L) \hookrightarrow V$.

Notwendig ist dann X auch exzeptionell in $C(L)$.

Es gibt eine exakte Sequenz $\mathcal{O}_{\overline{X}}^{N+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(1) \rightarrow 0$.

Sei $\mathcal{G} \subset \pi_* \mathcal{O}_{\overline{X}}(1)$ das Bild von $\mathcal{O}_{\overline{X}}^{N+1}$ unter $\pi_* \mathcal{O}_{\overline{X}}^{N+1} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\overline{X}}(1)$ (es ist $\mathcal{O}_X \subset \pi_* \mathcal{O}_{\overline{X}}$, weil π eigentliche Modifikation ist).

Beh.: $L := L(\mathcal{G})$ hat exzeptionelle Nullschnittfläche,

Bew.: Für $U_1 := X - Z(\pi)$, $U_2 := \pi^{-1}(U_1)$ gilt:

$(\pi|_{U_2})_*(\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)|_{U_2}) = \mathcal{G}|_{U_1}$, und $L(\mathcal{G}|_{U_1}) = V \cap (U_1 \times \mathbb{C}^{N+1})$, denn $\pi|_{U_2} \rightarrow U_1$ ist biholomorph.

$L(\mathcal{G})|(X - S(\mathcal{G}))$ ist ein Geradenbündel, und das Zentrum von π ist analytisch dünn in X . Daher ist

$$C(L) = \text{clos}_L(L|(X - S(\mathcal{G}))) = \text{clos}_L(L|(X - S(\mathcal{G}) - Z(\pi))) \hookrightarrow \text{clos}_L(V \cap (U_1 \times \mathbb{C}^{N+1})) = \text{clos}_V(V \cap (U_1 \times \mathbb{C}^{N+1})) = V.$$

Also ist C exzeptionell in $C(L)$, weil X exzeptionell in V ist.

Ancona [1] hat (8.12 ii $\Rightarrow$ i) bewiesen, indem er L einen geeigneten linearen Raum $L' \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^N$ vom Rang r so zuordnete, daß durch $X - S(\omega(L')) \ni x \mapsto L'_x \in G(r, N)$ eine bimeromorphe Korrespondenz von X auf einen Unterraum von $G(r, N)$ definiert wird.

8.13 Bemerkung: 8.12 ist äquivalent zum Lemma von Chow (in der Formulierung von 8.7):

Ist $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation mit projektivem $\bar{X}$, so existiert nach (8.12 (i) $\Rightarrow$ (ii)) ein linearer Faserraum mit exzeptioneller Nullschnittfläche auf X .

Ist umgekehrt $L \rightarrow X$ ein linearer Faserraum mit exzeptioneller Nullschnittfläche, so gibt es nach (8.12 (ii) $\Rightarrow$ (i)) ein projektives P und eine surjektive holomorphe Abbildung $P \rightarrow X$. Nach 7.1 existiert dann eine eigentliche Modifikation $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ mit projektivem $\bar{X}$.

8.14 Korollar: Ist X Mořsezonsch, so existiert ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{F}$ vom Rang 1 so, daß $X_{\mathfrak{F}}$ (vgl. 2.4) projektiv ist. Die eigentliche Modifikation $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ gemäß 8.7 kann also stets als monoidale Transformation im Sinne von 2.4 gewählt werden.

Beweis: klar nach (8.12 (i) $\Rightarrow$ (ii)).

Darüberhinaus gilt: Jede eigentliche Modifikation $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ mit projektivem $\bar{X}$ ist bis auf eine endliche Modifikation eine monoidale Transformation im Sinne von 2.4:

8.15 Korollar: Sei $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation mit projektivem $\bar{X}$.

Dann gibt es einen kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathfrak{G}$ vom Rang 1 und eine endliche Modifikation $\chi: \bar{X} \rightarrow X_{\mathfrak{G}}$ mit $\pi_{\mathfrak{G}} \circ \chi = \pi$.

Beweis: Es ist $\bar{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$.

Sei $\mathcal{G} \subset \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$ das Bild von $\mathcal{O}_X^{N+1}$ unter $\pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$.

Der Epimorphismus $\mathcal{O}_X^{N+1} \rightarrow \mathcal{G}$ induziert einen Epimorphismus

$$\mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} \rightarrow \pi^* \mathcal{G}. \quad \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} = \pi^* \mathcal{O}_X^{N+1} \rightarrow \pi^* \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} \text{ bzw. } \pi^* \mathcal{G} \rightarrow \pi^* \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$$

seien die Urbildmorphisme von $\mathcal{O}_X^{N+1} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1}$ bzw.

$$\mathcal{G} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1); \quad \pi^* \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} \text{ und } \pi^* \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$$

seien die kanonischen Morphismen. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} & \rightarrow & \pi^* \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} & \rightarrow & \mathcal{O}_{\bar{X}}^{N+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi^* \mathcal{G} & \rightarrow & \pi^* \pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\bar{X}}(1) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

kommutativ mit exakten Spalten. Also ist der durch die zweite Zeile des Diagramms gegebene Morphismus $\pi^* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$ ein Epimorphismus.

Für den kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{G}$ vom Rang 1 gilt somit:

$\pi^* \mathcal{G}$ besitzt einen lokal freien Quotienten vom Rang 1.

Wegen der universellen Eigenschaft der monoidalen Transforma-

tion $\pi_{\mathcal{G}}: X_{\mathcal{G}} \rightarrow X$ gibt es daher ein holomorphes $\chi: \bar{X} \rightarrow X_{\mathcal{G}}$

mit $\pi_{\mathcal{G}} \circ \chi = \pi$ und $\mathcal{O}_{\bar{X}}(1) \cong \chi^* \mathcal{I}_{1, \mathcal{G}}$. (vgl. 2.1).

Notwendig ist dann $\mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$ längs jeder Faser von χ trivial.

Weil $\mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$ ample ist, folgt: Die Fasern von χ sind diskret.

χ ist eine eigentliche (und damit endliche) Modifikation,

weil $\pi = \pi_{\mathcal{G}} \circ \chi$ eine eigentliche Modifikation ist.

Literatur:

- 1 Ancona, V.: Espaces fibrés linéaires faiblement négatifs sur un espace complexe.
Trans. Amer. Math Soc. 215(1976), 45 - 61
- 2 Cartier, P.: Sur un théorème de Snapper.
Bull. Soc. Math. France 88(1960), 333 - 343
- 3 Cartier, P.: Diviseurs amples.
Séminaire Bourbaki 18ième année, 1965/66, no. 301
- 4 Fischer, G.: Complex analytic geometry.
Lecture Notes in Mathematics, vol. 538.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976
- 5 Fischer, G.: Projektive Einbettung komplexer Mannigfaltigkeiten.
Math. Ann. 234(1978), 45 - 50
- 6 Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen.
Math. Ann. 146(1962), 331 - 368
- 7 Grauert, H./Remmert, R.: Bilder und Urbilder analytischer Garben.
Ann. of Math. (2) 68(1958), 393 - 343
- 8 Grauert, H./Remmert, R.: Analytische Stellenalgebren.
Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 176.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971

- 9 Griffiths, Ph.: Topics in algebraic and analytic geometry.
Princeton University Press, Princeton N.J. 1974
- 10 Grothendieck, A.: Techniques de construction en géométrie analytique.
Séminaire Cartan 13ième année, 1960/61
- 11 Hartshorne, R.: Ample subvarieties of algebraic varieties.
Lecture Notes in Mathematics, vol. 156.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970
- 12 Hironaka, H.: Flattening theorem in complex-analytic geometry.
Amer. J. Math. 97(1975), 503 - 547
- 13 Hironaka, H./Rossi, H.: On the equivalence of imbeddings of exceptional complex spaces.
Math. Ann. 156(1964), 313 - 333.
- 14 Hopf, H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten.
Comment. Math. Helv. 29(1955), 132 - 156
- 15 Kleiman, S.: Toward a numerical criterion of ampleness.
Ann. of Math. (2) 84(1966), 293 - 344
- 16 Kuhlmann, N.: Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von H. Hopf.
Arch. Math. 11(1960), 431 - 436

- 17 Maurer, J.: Zur Auflösung der Entartung gewisser holomorpher Abbildungen.
Dissertation. München 1976
- 18 Mořsezon, B.G.: On n -dimensional compact analytic varieties with n algebraically independent meromorphic functions.
Amer. Math. Soc. Transl. 63(1967), 51 - 177
- 19 Mumford, D.: Algebraic geometry I.
Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 221.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976
- 20 Prill, D.: Über lineare Faserräume und schwach negative Geradenbündel.
Math. Z. 105(1968), 313 - 326
- 21 Remmert, R./van de Ven, T.: Über holomorphe Abbildungen projektiv-algebraischer Mannigfaltigkeiten auf komplexe Räume.
Math. Ann. 142(1961), 453 - 486
- 22 Riemenschneider, O.: Characterizing Mořsezon-spaces by almost positive coherent analytic sheaves.
Math. Z. 123(1971), 263 - 284
- 23 Riemenschneider, O.: A generalization of Kodaira's embedding theorem.
Math. Ann. 200(1973), 99 - 102

- 24 Rossi, H.: Picard variety of an isolated singular point.
Rice Univ. Studies 54(1968), no. 4, 63 - 73
- 25 Šafarevič, I.R.: Basic algebraic geometry.
Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 213.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974
- 26 Serre, J.P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique.
Ann. Inst. Fourier 6(1955), 1 - 42
- 27 Serre, J.P.: Faisceaux algébriques cohérents.
Ann. of Math. (2) 61(1955), 197 - 278

Lebenslauf

Geburtsdatum: 4.4.1952

Geburtsort: Straubing

Schulbildung: 1958 - 1962 Besuch der Volksschule
1962 - 1970 Besuch des Ludwigsgymnasiums in
Straubing bis zum Abitur 1970

Studium: Ab WS 1970/71 Studium der Mathematik an der
Ludwig-Maximilians-Universität München bis
zur Diplom-Prüfung am 26.2.1976

Berufliche

Tätigkeiten: 1.3.76 - 31.10.77 wissenschaftliche Hilfs-
kraft, seit 1.11.77 Verwalterin der Dienst-
geschäfte eines wissenschaftlichen
Assistenten, beides am Mathematischen
Institut der Universität München.

